高中数学竞赛教程

蘇步青題 

高中数学竞赛教程

蘇步青題 

主编 常庚哲 李炯生
编著 常庚哲 史济怀
李炯生 严镇军
杜锡录 谢盛刚
苏 淳 李尚志
余红兵

江苏教育出版社

高 中 数 学 竞 赛 教 程

常庚哲　　李炯生
主　　编

常庚哲　　史济怀　　李炯生
严镇军　　杜锡录　　谢盛刚
苏　淳　　李尚志　　余红兵
编　　著

江 苏 教 育 出 版 社

内 容 简 介

本书的九位作者(教授四名、副教授五名、讲师一名)均为中国科学技术大学数学系教师。作者们既有从事现代数学研究的背景，又有组织、辅导数学竞赛的经验，因而使这本新作别具特色。

本书将高中数学竞赛的六大内容(初等几何、函数方程、不等式、初等数论、多项式理论、组合数学)分为四十七讲，取材新颖，例、习题丰富，部分题目译自国外最新资料。全书科学性强，系统性强，覆盖面广，难易适度，便于自学，各地数学奥林匹克学校、各中学数学课外小组选作教材尤为适宜。高中学生学完全书，可以达到适应省级与全国竞赛的水平。

本书可供高中学生，中学数学教师、教研员，师范院校数学系师生阅读。

本书于1990年参加由中国教育学会数学教育研究发展中心主办的"全国优秀数学教育类图书评选"，被列入"优秀书目"，且为"优秀书目"中唯一的高中数学竞赛读物。本书还被评为"第4届(1989年)华东地区优秀教育图书"。

(本书平装本从第5次印刷本开始，增加封面压膜和前、后环衬页，但定价不变。)

高 中 数 学 竞 赛 教 程
主编：常庚哲　李炯生
编著：常庚哲　史济怀　李炯生
严镇军　杜锡录　谢盛刚
苏　淳　李尚志　余红兵

出版发行：江 苏 教 育 出 版 社
经　　销：江 苏 省 新 华 书 店
印　　刷：常 熟 市 印 刷 二 厂

开本 850×1168 毫米　1/32　印张 14　字数 360,000
1989 年 6 月第 1 版　　1991 年 3 月第 5 次印刷
印数(平) 65,031—95,030 册
　　(精) 2,001— 7,000 册

ISBN 7—5343—0733—3

G·642　　定价：(平)4.20元
　　　　　　　(精)5.00元

责任编辑　喻　纬

目　录

第1讲　命题转换与解法探求

杜 锡 录

目前国内外各类数学竞赛比较频繁，如果每次所命的题都是一些好题和新题，当然最好，但是这对命题者的要求委实太高．不过，用一些明显的陈题也不太好．于是就需要把一些好的陈题加以变形或推广，换一个面貌出现，这几乎是每一个命题者经常使用的方法．如果参加数学竞赛的学生们也能掌握这种变形和推广的方法，那末，他对数学的认识深度就会有所提高，他的解题能力的增强就会有所突破，他也就可能在各类数学竞赛中大显身手．现在的问题是，掌握这种方法难不难呢？其实不难，关键在于你对待一个题目的态度．一个好题拿到手之后，往往千方百计地想法把它解出来．一旦解出，喜悦之情顿时涌上心头．同时，往往有一种大功告成的感觉，将解出的题目一放，又去找别的题目去解，争取体会到下一次成功的喜悦．殊不知，这种做完一个好题就束之高阁的态度恰恰错过了提高的宝贵机会．每做完一个题后，你可曾想到，你得到了些什么？你还应做些什么，从而使你得到更多的东西？

当你做完一个题，尤其是你认为的一个好题后，请想一想下面的几个问题：

1．还有其他的做法吗？

2．这些做法中哪个做法是本质的，最好的，最简单的？

3．利用这些做法，你能把这个题目变化一下吗？变完后，并试着做一下．如果你认为又是一个好题，就请你的同学们做一下．

4．从本质性的做法中，试着做一些推广，这又能得到一些好题．

当你做完以上的各项事情后，我相信你一定会从一个题目中得到更多的东西，可以说，你的能力已经提高了一步.

下面我们通过一些例题来说明之.

例 1 在$\triangle ABC$中，已知$AB=AC$，$\angle A=100°$，BD是角B的平分线并交AC于D，求证：$BC=BD+AD$.

证 如图1-1，在BC上取A'，使$BA'=BA$，连DA'.

在BC上取D'，使$DD'=DA'$，连DD'. 显然，$\triangle ABD\cong\triangle A'BD$.

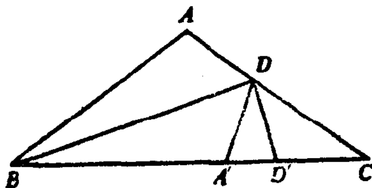


图 1-1

$\therefore$ $\angle BA'D=100°\Rightarrow$

$\angle DA'D'=\angle DD'A'=80°\Rightarrow\angle A'DD'=20°\Rightarrow$

$\angle BDD'=80°\Rightarrow BD=BD'$.

$\because$ $\angle DD'C=100°\Rightarrow\angle D'DC=\angle C=40°\Rightarrow CD'=DD'$

$=DA'=AD$,

$\therefore$ $BC=BD'+CD'=BD+AD$.

这个证法是好的，充分体现了平面几何的魅力. 证明中的第一个关键所在是：把$\triangle ABD$以BD为轴翻折，即作对称变换.

这个题的证法很多，除去纯几何的证法外，还可用三角法，解析法来做，这些我们在下面再来讨论.

我们先来分析一下题目中的条件和结论：实际上有三个已知条件和一个结论，这些都满足唯一性原则. 如"$AB=AC$"满足"作一线段等于一已知线段，能作且只能作一条"的唯一性；"BD是角B的平分线"满足"作已知角的平分线能作且只能作一条"的唯一性；"$\angle A=100°$"满足"作一角等于已知角，能作且只能作一个"的唯一性；"$BC=BD+AD$"满足"作一线段等于两已知线段的和，能作且只能作一条"的唯一性. 于是由简单的逻辑知识知道，该命题的逆命题、否命题、逆否命题都成立，这样我们就

能得到一系列与之相关的题目，并且这些题目都是有一定难度的．我们先看逆命题：

例 2 在$\triangle ABC$中，已知$AB=AC$，BD是角B的平分线交AC于D，$BC=BD+AD$，求证：$\angle A=100°$.（或求$\triangle ABC$的三个角.）

证 如图 1-2，在BC上取$BA'=BA$，连DA'，显然

$\triangle ABD \cong \triangle A'BD$

$\Rightarrow AD=DA'$.

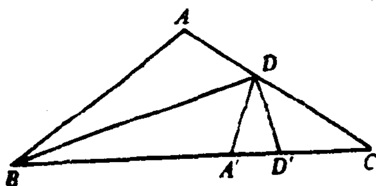


图 1-2

设$\dfrac{\angle B}{2}=x$，则有

$\angle B=\angle C=2x$,

$\angle A=180°-4x$,

$\angle ADB=\angle A'DB=3x$，$\angle DA'C=4x$.

在BC上选点D'，使$\angle CDD'=2x$，即$\triangle CDD'$为等腰三角形，得$CD'=DD'$.

∵ $\angle DD'A'=\angle C+\angle CDD'=4x$,

$\angle DA'D'=4x\Rightarrow\triangle DA'D'$为等腰三角形

$\Rightarrow CD'=DD'=DA'=AD$,

由于$BC=BD+AD=BD+CD'$,

∴ $BD'=BD$，$\angle BDD'=\angle BD'D=4x$.

∴ $\angle A'DD'=\angle BDD'-\angle BDA'=x$.

在$\triangle A'DD'$中可得，$9x=180°$，即有$x=20°$，于是有$\angle A=180-4x=100°$.

注 与例 1 的原命题相同，作出两个三角形全等，即$\triangle ABD\cong\triangle A'BD$是关键所在．另一个关键就是那四条线段相等，即$AD=DA'=DD'=CD'$.

以上是对纯几何证法而言的．如果考虑三角证明法，也将是十分有趣的．

例 1 的三角证法

在$\triangle BCD$中，由正弦定理得

$$\frac{BD}{\sin C}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BC}{\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)},$$

即
$$BD=\frac{\sin C}{\sin\left(A+\frac{B}{2}\right)}BC=\frac{\sin 40°}{\sin 60°}BC.$$

在$\triangle ABD$中，有$\dfrac{BD}{\sin A}=\dfrac{AD}{\sin\frac{B}{2}}$，

即
$$AD=\frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin A}BD=\frac{\sin 20°}{\sin 100°}\cdot\frac{\sin 40°}{\sin 60°}BC.$$

所以
$$\begin{aligned}BD+AD&=BC\left(\frac{\sin 40°}{\sin 60°}+\frac{\sin 20°\sin 40°}{\sin 100°\sin 60°}\right)\\&=BC\,\frac{\sin 40°}{\sin 60°}\cdot\frac{\sin 100°+\sin 20°}{\sin 100°}\\&=BC\,\frac{2\sin 40°\sin 60°\cos 40°}{\sin 60°\sin 100°}\\&=BC\,\frac{\sin 80°}{\sin 100°}=BC.\end{aligned}$$

利用三角知识经过简单计算，很容易地得到了例 1 的证明．我们自然会想到这个命题的那些逆命题、否命题、逆否命题也可以用三角方法来证明，如例 2 所示的逆命题．不过我们先不忙于证明它，不妨再变化它一下，看一看能否把它的所有的已知条件都变成三角形式，即把它彻底改造成一个三角题．例如，可以把等腰的条件$AB=AC$化为$a=2b\cos C$，这是教科书上早已有的结论，两个条件是等价的．又如果在条件中出现$\frac{B}{2}$，则蕴含有角平分线的条件，再利用正弦定理，用与例 1 的三角证法中相仿的方

法可以把已知条件 $BC=BD+AD$ 化为：$\sin A\sin\left(\frac{B}{2}+C\right)$ $=\sin C\left(\sin\frac{B}{2}+\sin A\right)$. 经过整理，我们就可以得到如下的题目：

例 3 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=2b\cos C$，$\sin A\sin\left(\frac{B}{2}+C\right)$ $=\sin C\left(\sin\frac{B}{2}+\sin A\right)$，求这个三角形的各个角的度数(不用反三角函数表示)．

这就是安徽省 1979 年数学竞赛第一试第 9 题．如果没有前面的分析，你能想到是由例 1 变来的吗？即使你对例 1 是熟悉的，我相信你只能在得到答案后才能悟到这题是与例 1 有联系的．同时，我还相信你已经开始对我们这种变化题目的方法感兴趣了．如果真是这样，你不妨把例 1 的所有的逆命题，否命题，逆否命题都写出来，再试图写成三角形式．

下面我们给出例题 3 的解．

解 由 $a=2b\cos C=b\cos C+c\cos B$，得

$$b\cos C=c\cos B,$$

再由 $b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，得

$$\sin B\cos C=\sin C\cos B,$$

即
$$\sin(B-C)=0,$$

所以
$$B=C，A=\pi-2B.$$

于是有
$$\sin 2B\sin\frac{3B}{2}=\sin B\left(\sin\frac{B}{2}+\sin 2B\right),$$

即
$$2\cos B\sin\frac{3B}{2}=\sin\frac{B}{2}+\sin 2B,$$

因为
$$2\cos B\sin\frac{3B}{2}=\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{5B}{2},$$

所以
$$\sin\frac{5B}{2}=\sin 2B,$$

得 $$2\sin\frac{B}{4}\cos\frac{9B}{4}=0.$$

因为 $$0<B<\frac{\pi}{2},\ \sin\frac{B}{4}\neq 0,$$

于是 $$\cos\frac{9B}{4}=0,$$

得 $$\frac{9B}{4}=\frac{\pi}{2},\qquad B=\frac{2\pi}{9}.$$

所以$\triangle ABC$的三个角是：

$$A=\frac{5\pi}{9},\ B=C=\frac{2\pi}{9}.$$

上面我们对例1进行了一系列的讨论．最后再提及一点，例1还可以用解析几何来作，而且也比较简单，但没有突出的特点，故不进行专门的讨论．下面的例题是1983年美国普特南大学生数学竞赛中的一个题，它在解析几何的应用上颇具特点．

例4 求二元函数 $f(u,v)=(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v}\right)^2$ 的最小值．

大学生数学竞赛中的试题，人们往往要用高等数学的方法来解．殊不知，这样解例4是相当麻烦的．其实你只要注意到这个题目中的几何意义，用初等方法来解却是很简单的．

首先，函数表达式是两点之间距离的平方．这两个点是$(u,\sqrt{2-u^2})$，$\left(v,\frac{9}{v}\right)$．其次，我们再来看这两个点具有什么特点：

$$u^2+(\sqrt{2-u^2})^2=2,$$

这是圆 $x^2+y^2=2$ 上的一点．

$$v\cdot\frac{9}{v}=9,$$

这是双曲线 $xy=9$ 上的一点．

这时，这个题目的几何意义就十分明显了："求圆$x^2+y^2=2$和

双曲线 $xy=9$ 之间的最短距离."事实上，出题人正是从这里出发，通过简单的变形而得到的，而且把题目变难了.但是，对于我们做题的人来讲，这正好是我们的一个极好的锻炼机会．初看这是一道代数题，而其本质却是一道几何题．你想不到这一点，解题就十分困难；你想到了这一点，题目就变得十分简单．我们在做一道题时，必须先审好题，充分理解题意，把握住题目的本质，这样完成解答就不难了．

再就例 4 而言，我们可以变成下面的一道题：

"求二元函数 $f(\theta,\varphi)=(\sqrt{2}\cos\theta-3\operatorname{tg}\varphi)^2+(\sqrt{2}\sin\theta-3\operatorname{ctg}\varphi)^2$ 的最小值."

你能看出它是怎么变来的吗？实际上，我们把例 4 中的圆和双曲线都写成参数方程的形式：

圆 $x^2+y^2=2$：　$x=\sqrt{2}\cos\theta$，　$y=\sqrt{2}\sin\theta$；

双曲线 $xy=9$：　$x=3\operatorname{tg}\varphi$，　$y=3\operatorname{ctg}\varphi$.

代入例 4 中的函数就行了．这样又变出了一道三角题．

作为这一讲的结束语，我想提醒大家，这种变形及联想的思想方法是重要的，平时作题要加以注意才是．

思　考　题*

1．把例 1 的所有的逆命题、否命题、逆否命题写出来．能否把它们变成三角形式？试给出它们的证明．
2．把例 4 解出来！
3．对于 $a\in R$，确定 $\sqrt{a^2+a+1}-\sqrt{a^2-a+1}$ 的所有可能的值．(罗马尼亚 1978 年竞赛题)

* 各讲正文后所附的"思考题"未编序号，"习题"序号与该讲序号相同．书末给出所有习题的提示与解答．

第2讲　发现题目及其解法的本质

杜 锡 录

在第1讲中我们已经讲到，对待一个题目，尤其是一个好的题目，怎样做到一题多解，一题多用．在这一讲中我们着重谈一下，在一题多解中，怎样努力挖掘出题目的本质含意及本质解法，这样的解法往往是最简的，并且能加以推广．

例 1　在$\triangle ABC$中，证明$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{2^3}$．

这个题目的证法很多，我们先看其中比较简单的一种．

证法一　不妨假设$\triangle ABC$是锐角三角形，

$$
\begin{aligned}
&\cos A\cos B\cos C\\
=&\frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]\cos C\\
=&\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos C]\cos C\\
\leqslant&\frac{1}{8}[\cos(A-B)-\cos C+\cos C]^2\\
=&\frac{1}{8}\cos^2(A-B)\leqslant\frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

证明中可见，等号成立的充要条件是$A=B=C$．

事实上，由两个不等号中等号成立的条件得

$$A-B=0,\ \mathrm{ccs}(A-B)-\cos C=\cos C,$$

即可解得 $A=B=C=60^\circ$．

上面的证明已经够简单的了，是不是最好的呢？还不是最好的．最好的证法是下述的

证法二　不妨设$\triangle ABC$是锐角三角形，

$$\because \quad a = b\cos C + c\cos B \geqslant 2\sqrt{bc\cos B\cos C},$$
$$b = c\cos A + a\cos C \geqslant 2\sqrt{ca\cos A\cos C},$$
$$c = a\cos B + b\cos A \geqslant 2\sqrt{ab\cos A\cos B},$$

将三个不等式相乘，两边消去 abc，即得

$$1 \geqslant 8\cos A\cos B\cos C,$$

即
$$\cos A\cos B\cos C \leqslant \frac{1}{8}.$$

这个证明是十分优美的，整齐、对称，仅用到了射影定理和平均不等式．同学们千万不要小看射影定理，在一定程度上，它比余弦定理有更重要的意义．

这个证明是本质的，因为它揭示了与射影定理的内在联系，而这种联系不仅在平面上存在，在高维空间中也存在．下面仅举三维空间为例．

例 2 设 $A_1A_2A_3A_4$ 是空间中的一个四面体，θ_{12}，θ_{13}，θ_{14}，θ_{23}，θ_{24}，θ_{34} 是六条棱 A_1A_2，A_1A_3，A_1A_4，A_2A_3，A_2A_4，A_3A_4 上的二面角的平面角，如果这六个角都是锐角，证明

$$\sqrt[6]{\cos\theta_{12}\cos\theta_{13}\cos\theta_{14}\cos\theta_{23}\cos\theta_{24}\cos\theta_{34}} \leqslant \frac{1}{3}.$$

不难想到，如果利用上述证法一的方法来证明这个题，将是十分困难的，这就是说，证法一虽然简单，但不是本质的．我们说证法二是本质的，就在于它整个地适用于例 2．为此，我们先证明空间中的射影定理，这里，我们不引进带号面积的概念，简述射影定理如下．

射影定理 在四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 中，四个面的面积为 $S_1 = S_{\triangle A_2A_3A_4}$，$S_2 = S_{\triangle A_1A_3A_4}$，$S_3 = S_{\triangle A_1A_2A_4}$，$S_4 = S_{\triangle A_1A_2A_3}$，6 条棱上的二面角的平面角为锐角，$\theta_{ij}(1 \leqslant i < j \leqslant 4)$ 是棱 A_iA_j 上的二面角的平面角，则 $S_1 = S_2\cos\theta_{34} + S_3\cos\theta_{24} + S_4\cos\theta_{23}$．

证 如图 2-1，由 A_1 作对面的垂线 A_1H，交 $\triangle A_2A_3A_4$ 于

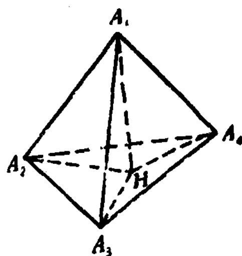


图 2-1

H，则有 $S_1=S_{\Delta HA_3A_4}+S_{\Delta HA_2A_4}+S_{\Delta HA_2A_3}$

$$=S_2\cos\theta_{34}+S_3\cos\theta_{24}+S_4\cos\theta_{23}.$$

后一步利用了高中立体几何教材习题上的一个结果．这个结果可以当作一个定理来用，是很重要的，大家不妨写出来或去查一下．现在我们回到例题 2 的证明．利用图 2-1．

证　由射影定理知

$$S_1=S_2\cos\theta_{34}+S_3\cos\theta_{24}+S_4\cos\theta_{23}$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{S_2S_3S_4\cos\theta_{23}\cos\theta_{24}\cos\theta_{34}},$$
$$S_2=S_1\cos\theta_{34}+S_3\cos\theta_{14}+S_4\cos\theta_{13}$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{S_1S_3S_4\cos\theta_{34}\cos\theta_{13}\cos\theta_{14}},$$
$$S_3=S_1\cos\theta_{24}+S_2\cos\theta_{14}+S_4\cos\theta_{12}$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{S_1S_2S_4\cos\theta_{24}\cos\theta_{14}\cos\theta_{12}},$$
$$S_4=S_1\cos\theta_{23}+S_2\cos\theta_{13}+S_3\cos\theta_{12}$$
$$\geqslant 3\sqrt[3]{S_1S_2S_3\cos\theta_{23}\cos\theta_{13}\cos\theta_{12}},$$

将上面的四个不等式相乘，并消去 $S_1S_2S_3S_4$，得

$$(\cos\theta_{12}\cos\theta_{13}\cos\theta_{14}\cos\theta_{23}\cos\theta_{24}\cos\theta_{34})^{\frac{2}{3}}\leqslant\frac{1}{3^4},$$

两边同开 4 次方，即得

$$(\cos\theta_{12}\cos\theta_{13}\cos\theta_{14}\cos\theta_{23}\cos\theta_{24}\cos\theta_{34})^{\frac{1}{6}}\leqslant\frac{1}{3}.$$

容易证明，当且仅当正四面体时等式成立．

可以看到，上面的证明同例 1 的证法二如出一辙，对于更高维空间中的单纯形所具有的类似性质，我们仍能用这种方法证明，只不过要先证明相应的射影定理，这些就超出高中课程的范围了，在此不再详述．这里有必要再提及的是，对简单的题目要深入了解，并能提出其本质，就可能得出更进一步的更一般的结

果.数学之美妙在于此，数学本身的发展大多亦在于此.

大家知道勾股定理的证法很多，其中一个本质的证法就是依赖于射影定理．现简述如下：如图 2-2，得

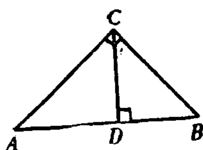


图 2-2

$$c = a\cos B + b\cos A,$$

$$a = c\cos B,$$

$$b = c\cos A,$$

所以 $$c = c(\cos^2 A + \cos^2 B),$$

得 $$\cos^2 A + \cos^2 B = 1,$$

$$a^2 + b^2 = c^2(\cos^2 A + \cos^2 B) = c^2,$$

即是勾股定理.

三维空间的勾股定理是：设$A_1A_2A_3A_4$是四面体，$A_1 - A_2A_3A_4$是直三面角，A_1，A_2，A_3，A_4 所对面的面积分别为 S_1，S_2，S_3，S_4，则有 $S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2$.

这个定理的最简单、最本质的证法同样是依赖于射影定理.

证 利用图 2-1，

$$S_2 = S_1\cos\theta_{34},\quad S_3 = S_1\cos\theta_{24},\quad S_4 = S_1\cos\theta_{23},$$

$$\begin{aligned} S_1 &= S_2\cos\theta_{34} + S_3\cos\theta_{24} + S_4\cos\theta_{23} \\ &= S_1(\cos^2\theta_{34} + \cos^2\theta_{24} + \cos^2\theta_{23}), \end{aligned}$$

所以 $$\cos^2\theta_{34} + \cos^2\theta_{24} + \cos^2\theta_{23} = 1.$$

于是 $$S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 = S_1^2(\cos^2\theta_{34} + \cos^2\theta_{24} + \cos^2\theta_{23}) = S_1^2.$$

这就证明了三维空间的勾股定理.

比较这两个勾股定理的证明过程，可以发现它们惊人地相似，这正是其本质所在.

对于勾股定理，我们再做点其他的事，想一下还有些什么问题．例如在直角三角形 ABC 中，$\angle C = 90°$．我们由勾股定理可知 $c^2 = a^2 + b^2$，另外还有两边之和大于第三边，$c < a + b$．首先要问这样一个问题：比较 c^n 和 $a^n + b^n$，其中 $n > 0$．已知当 $n = 2$时 $c^2 = a^2 + b^2$.当 $n = 1$ 时有 $c < a + b$，是否有：对 $0 < n < 2$，c^n

$<a^n+b^n$. 也不难猜想：对 $n>2$，$c^n>a^n+b^n$. 这又是很整齐的结论，对 $n\leqslant 0$ 显然有 $c^n<a^n+b^n$. 我们写得完整一些，就是

定理 在直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，则

（i）$c^2=a^2+b^2$；

（ii）$c^n>a^n+b^n$，当 $n>2$ 时；

（iii）$c^n<a^n+b^n$，当 $n<2$ 时.

证 （i）即勾股定理.

（ii）$n>2$ 时，$c^n=c^{n-2}c^2=c^{n-2}(a^2+b^2)=c^{n-2}a^2+c^{n-2}b^2$

$$>a^{n-2}a^2+b^{n-2}b^2=a^n+b^n.$$

这里利用了 $n-2>0$，$c^{n-2}>a^{n-2}$，$c^{n-2}>b^{n-2}$.

(iii)的证明和(ii)完全类似.

上述性质还可以推广到三维空间去，得到与空间的勾股定理相应的一些性质.

例3 设 $A_1A_2A_3A_4$ 是一四面体，$A_1-A_2A_3A_4$ 是直三面角，A_1，A_2，A_3，A_4 所对面的面积分别是 S_1，S_2，S_3，S_4，则有

（i）$S_1^2=S_2^2+S_3^2+S_4^2$；

（ii）$S_1^n>S_2^n+S_3^n+S_4^n$，$n>2$ 时；

（iii）$S_1^n<S_2^n+S_3^n+S_4^n$，$n<2$ 时；

（iv）$\triangle A_2A_3A_4$ 是锐角三角形；

（v）过 A_1 作对面 $\triangle A_2A_3A_4$ 的垂线必通过 $\triangle A_2A_3A_4$ 的垂心.

证 （i）是空间的勾股定理，已证.

(ii)和(iii)完全类似于上述定理的证明.

(iv) 利用图 2-1，$A_2A_3>A_1A_3$，$A_2A_4>A_1A_4$，

$$A_2A_3^2+A_2A_4^2>A_1A_3^2+A_1A_4^2=A_3A_4^2,$$

所以 $\angle A_3A_2A_4$ 是锐角. 同理可证 $\angle A_3A_4A_2$，$\angle A_2A_3A_4$ 都是锐角，即 $\triangle A_2A_3A_4$ 是锐角三角形.

(v) 利用图 2-1. 过 A_1 作 $\triangle A_2A_3A_4$ 的垂线交 $\triangle A_2A_3A_4$ 于

H，我们证明 H 是 $\triangle A_2A_3A_4$ 的垂心．连 A_2H, A_3H，A_4H.

$$\left.\begin{array}{l}A_1A_4\perp A_1A_2\\A_1A_4\perp A_1A_3\end{array}\right\}\Rightarrow A_1A_4\perp\triangle A_1A_2A_3$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow A_1A_4\perp A_2A_3\\\because\ AH\perp A_2A_3\end{array}\right\}\Rightarrow A_2A_3\perp\triangle A_1A_4H$$

$$\left.\begin{array}{ll}&\Rightarrow A_2A_3\perp A_4H\\\text{同理}&A_3A_4\perp A_2H\\&A_4A_2\perp A_3H\end{array}\right\}\Rightarrow H\text{是垂心}.$$

从(v)的证明中还可以看出，如果 S 是 $\triangle A_2A_3A_4$ 任一边如 A_2A_3 上的任一点，则 $\angle SA_1A_4=90°$．这一性质的逆命题的变形就是 1938 年匈牙利数学竞赛第 3 题．

例 4 我们把连结三角形任一顶点和它的对边(或延长线)上任一点的直线叫做三角形的截线．证明：对空间中的任何一个锐角三角形，一定可以找到这样一个点，使得任一截线对这点所张的角都是直角．

通过以上的对空间勾股定理的研究得知，这样的点是存在的．这一点与这个锐角三角形构成一个四面体，这一点所在的三面角是一个直三面角．现在具体地把它找出来，只研究三角形所在面的同一侧．

如图 2-3．设所给的锐角三角形是 $\triangle A_2A_3A_4$，其垂心是 H，

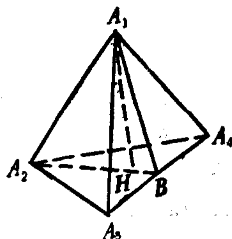


图 2-3

设所求点为 A_1，则三面角 $A_1-A_2A_3A_4$ 是直三面角，A_1H 垂直于 $\triangle A_2A_3A_4$ 所在的平面．连 A_2H 且延长，交 A_3A_4 于 B，则 $\triangle A_1A_2B$ 是直角三角形，且 $\angle A_2A_1B=90°$，所以 $A_1H^2=A_2H\cdot HB$. 于是，我们寻找的 A_1 点可以这样来作出：过 $\triangle A_2A_3A_4$ 的垂心 H 作 $\triangle A_2A_3A_4$ 所在平面的垂线，在垂线上选取一点 A_1，使得 $A_1H^2=A_2H\cdot$

HB.

例5还可以写成如下的命题形式："满足例5中的性质的点A_1，当且仅当A_1在平面$\triangle A_2A_3A_4$的过H的垂线上，并且A_1对$\triangle A_2A_3A_4$的三边中的张角至少有一个是直角."如果再把其中线素的计量关系加进去，就是1972年国际数学奥林匹克第5题：

例5 在四面体$ABCD$中，$\angle BDC$是直角，D到平面ABC的垂线足S是$\triangle ABC$的垂心．证明：

$$(AB+BC+CA)^2\leqslant 6(AD^2+BD^2+CD^2).$$

等号成立时是一个什么四面体？

证 如图2-4，作三角形ABC的高BE与CF交于S，由于

$$\left.\begin{array}{l}DS\perp AC\\AC\perp BE\end{array}\right\}\Rightarrow AC\perp BD,$$

又由 $BD\perp CD\Rightarrow BD\perp AD$,

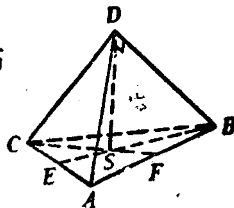


图 2-4

同理$CD\perp AD$，即$D-ABC$是直三面角．

$$(AB+BC+CA)^2\leqslant 3(AB^2+BC^2+CA^2)$$
$$=6(AD^2+BD^2+CD^2).$$

等号当且仅当$AB=BC=CA$时成立，此时的四面体是顶三面角为直三面角的正三棱椎．

思 考 题

1．假设P是锐角三角形内的任一点．证明：点P到边上的点的最大距离D比最小距离d至少大一倍．在什么条件下，$D=2d$？

2．(1) 第1题还有其他证法吗？条件是否可以改变？

(2) 把第1题推广到三维空间中去，并给出相应的证明．

(3) 你还能改造成其他的题目吗？

第3讲　构造性解题方法(一)

余 红 兵

解数学问题时，常规的思考方法是由条件到结论的定向思考．但有些问题按照这样的思维方式来寻求解题途径比较困难，甚至无从着手．在这种情况下，经常要求我们改变思维方向，换一个角度思考，以找到一条绕过障碍的新的途径．构造性思想及其方法是这样的一种手段．

例1　设x是实数，求$\sqrt{x^2-2x+2}+\sqrt{x^2-10x+34}$的最小值．

解　把题中式子变形为$\sqrt{(x-1)^2+1^2}+\sqrt{(x-5)^2+3^2}$．这可以看作是直角坐标系中动点$P(x,0)$到$A(1,1)$与$B(5,3)$的距离之和．作出$A$关于$x$轴的对称点$A'(1,-1)$，则$A'B$和$x$轴的交点$C(2,0)$到$A,B$的距离之和最小，且最小值是$4\sqrt{2}$．

注　这里的特点在于"换一个角度看问题"．针对问题的特点，构造一个"模型"，在这个模型上，问题变得直观和易于解决．

例2　任给8个非零实数a_1，…，a_8．证明：六个数$a_1a_3+a_2a_4$，$a_1a_5+a_2a_6$，$a_1a_7+a_2a_8$，$a_3a_5+a_4a_6$，$a_3a_7+a_4a_8$，$a_5a_7+a_6a_8$中，至少有一个是非负的．

证　在复平面上考虑四个向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$(O是原点)，A，B，C，D对应的复数依次为a_1+a_2i，a_3+a_4i，a_5+a_6i，a_7+a_8i．

四个向量两两所成的角中至少有一个不超过$\frac{360°}{4}=90°$，不妨假设$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$的夹角$\leqslant 90°$．则从余弦定理推出$|OA|^2+|OB|^2-|AB|^2\geqslant 0$，此即$a_1a_3+a_2a_4\geqslant 0$．

例 3 设 $a_1, \cdots, a_{100}$ 都是正数，满足条件 $a_1+\cdots+a_{100}=300$, $a_1^2+\cdots+a_{100}^2>10000$. 证明：必有三个数的和大于 100.

证 不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_{100}$. 我们证明必有 $a_1+a_2+a_3>100$. 否则，作如图 3-1 所示的三个边长都是 100 的正方形，拼成一个矩形，把边长为 $a_i(i=1,\cdots,100)$ 的小正方形依次放入矩形中(如图 3-1). 因 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_{100}$, 位于中间大正方形中的所有小正方形都包含在长为100，宽为 a_2 的小矩形中，位于最右边的大正方形中的所有小正方形都包含在长为 100，宽为 a_3 的小矩形中. 把这两个小矩形依次移到最左边的大正方形中边长为 a_1 的正方形的下方. 由于 $a_1+a_2+a_3\leqslant 100$, 这100个小正方形可以(没有重合地)放入边长为100的正方形之中，这和 $a_1^2+\cdots+a_{100}^2>100\times 100$ 矛盾. 所以，

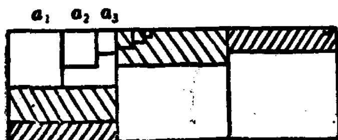


图 3-1

$$a_1+a_2+a_3>100.$$

例 4 证明：$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

证 如图 3-2，作 $\angle MON=\frac{\pi}{7}$. 依次地，在 OM 上取 $OA=1$；在 ON 上取异于 O 的 B，使 $AB=1$；在 OM 上取异于 A 的 C，使 $BC=1$；在 ON 上取异于 B 的 D，使 $CD=1$. 易得

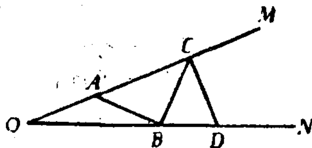


图 3-2

$\angle CAB=\angle ACB=\frac{2\pi}{7}$, $\angle CBD=\angle CDB=\angle ACD=\frac{3\pi}{7}$, 从而 $OC=OD$. 但 $OC=OA+AC=1+2AB\cos\frac{2\pi}{7}=1+$

$2\cos\frac{2\pi}{7}$，$OD=OB+BD=2\cos\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{3\pi}{7}$，

从而 $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.

例 5 证明：对每个 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的x，适合$|\sqrt{1-x^2}-px-q|\leqslant\frac{\sqrt{2}-1}{2}$的唯一的实数对$(p, q)$是$\left(-1, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

证 把所说的不等式变形为

$$-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\leqslant px+q\leqslant\sqrt{1-x^2}+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

分别以点$A\left(0, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$，$B\left(0, -\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$为圆心，半径为1作两个圆，即圆$A$和圆$B$.（读者可根据证明中的叙述画图.）圆$A$的两端点为$\left(0, \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$，$\left(1, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$，且位于第一象限内的弧记为$l_1$；圆$B$的两端点为$\left(0, \frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)$，$\left(1, -\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$，且位于第一、四象限内的弧记为$l_2$，则上面变形后的不等式意味着，当$0\leqslant x\leqslant 1$时，直线$y=px+q$位于$l_1$和$l_2$之间.

为了确定p, q，只需注意连结l_1两个端点的直线恰好与圆B（从而与l_2）相切，因此直线$y=px+q$必然经过l_1的两个端点，从而$p=-1$，$q=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

在解题时，构造性思想还可以体现在，把题设条件所给出的数量关系，构想、组合成一种新的具体关系. 例如构造出与问题有关的方程、函数、数列、恒等式等. 从下面的例子可以看出，这种想法的实现是非常灵活的，不可生搬硬套.

例 6 设实数a，b，c满足：$(a-c)^2-4(a-b)(b-c)=0$. 证明a，b，c成等差数列.

证 如果$a=b$，则$a=b=c$，从而结论成立. 假设$a\neq b$，

则条件意味着二次方程$(a-b)x^2+(c-a)x+(b-c)=0$有两个相等的实根。

另一方面(观察上面的辅助方程)，方程的系数之和为零，从而$x=1$为重根．由韦达定理，得到$\frac{b-c}{a-b}=1\times1=1$，即$a,b,c$成等差数列。

例7 证明：$\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}$.

证 $\theta=\frac{n\pi}{7}(n=0,1,\cdots,6)$是$\operatorname{tg}7\theta=0$的根．设$x=\operatorname{tg}\theta$，由$\operatorname{tg}7\theta=0$得$\operatorname{tg}4\theta=-\operatorname{tg}3\theta$，则$\frac{4x-4x^3}{1-6x^2+x^4}=-\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$，化简得$x^6-21x^4+35x^2-7=0$.

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$，$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}$，…，$\operatorname{tg}\frac{6\pi}{7}$是这个方程的根，所以由韦达定理，$\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\cdot\cdots\cdot\operatorname{tg}\frac{6\pi}{7}=-7$,

此即 $-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{2\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{3\pi}{7}=-7$.

所以 $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\cdot\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}$.

例8 设n为正整数，证明$\frac{2^{2n}}{2n}\leqslant C_{2n}^n\leqslant2^{2n}$.

证 本题可用归纳法来证明．我们给出一个基于恒等式的证法．注意，从二项式定理，有

$$2^{2n}=(1+1)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1+\cdots+C_{2n}^n+\cdots+C_{2n}^{2n}.$$

因此立刻看出$2^{2n}\geqslant C_{2n}^n$.

另一方面，把上面等式的右端写成$2n$项的和

$$2+C_{2n}^1+\cdots+C_{2n}^n+\cdots+C_{2n}^{2n-1}.$$

由于C_{2n}^n是诸项中最大的一项，又显然有$C_{2n}^n\geqslant2$，因此得

出 $2^{2n}\leqslant 2nC_{2n}^{1}$， 即 $C_{2n}^{n}\geqslant\frac{2^{2n}}{2n}$.

例 9 设实数 a，b，c，d 满足 $a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant 1$. 证明：$(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4\leqslant 6$.

证 论证的诀窍是根据问题的特点构造出一个（与问题有关的）恒等式. 注意 $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$，

从而 $$(a+b)^4+(a-b)^4=2a^4+12a^2b^2+2b^4.$$

不难看出，欲证的不等式左边的式子中，a,b,c,d 都出现三次. 这样，下面的恒等式是和问题紧密相关的：

$$\begin{aligned}&(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4\\&+(a-b)^4+(a-c)^4+(a-d)^4+(b-c)^4+(b-d)^4+(c-d)^4\\&=6(a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2\\&\quad+2c^2d^2)=6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.\end{aligned}$$
至此，结论是显然的.

注 本题用其他方法（例如用著名不等式）来证，不易奏效. 从上面的解答也可以看出题目是怎样编出来的. 构造并利用恒等式，是证明不等式以及解决其他问题的很基本的技能.

例 10 设 k 是给定正整数，$\alpha=k+\frac{1}{2}+\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}$.

证明：α^n 的整数部分 $[\alpha^n]$ 都能被 k 整除 $(n\geqslant 1)$.

证 本题与许多类似问题的关键是，同时考虑 α 及其"共轭". 注意 α 是方程 $x^2-(2k+1)x+k=0$ 的一个根，另一个共轭的根是

$$\beta=k+\frac{1}{2}-\sqrt{k^2+\frac{1}{4}},$$

显然 $0<\beta<1$. 考虑 $u_n=\alpha^n+\beta^n\,(n\geqslant 1)$，$u_n$ 是整数（见下面的证明），这样可以把 $[\alpha^n]$ 表示出来.

因 $0<\beta<1$，从而 $0<\beta^n<1$，故 $u_n-1<\alpha^n<u_n$，$[\alpha^n]=u_n+1$ $(n\geqslant 1)$. 这样问题等价于证明 $u_n\equiv 1\pmod{k}$ $(n\geqslant 1)$.

我们通过上面的辅助方程作出数列 $\{u_n\}\,(n\geqslant 1)$ 的递推公式：由于 α，β 都适合方程，因此有

$$\alpha^{n+2}+(2k+1)\alpha^{n+1}+k\alpha^{n}=0,$$
$$\beta^{n+2}-(2k+1)\beta^{n+1}+k\beta^{n}=0.$$

两式相加，得 $u_{n+2}=k(2u_{n+1}-u_n)+u_{n+1}$.

由此不难用归纳法证明，u_n都是整数且$u_n\equiv 1(\bmod k)$　$(n\geqslant 1)$.

构造实例和反例是基本技能之一. 所谓构造实例的意思是说，举一个例子说明一个命题可以为真. 而为了说明一个命题不真，常常选择一个符合题设条件但命题结论不成立的特例. 这个过程叫做构造反例. 选择特殊值或极端情形，常常是构造反例的出发点.

例 11　平面上一点 P 到一个凸四边形四个顶点的距离都相等，则 P 点是否一定在四边形的内部，或一定在四边形的边界上，或一定在四边形的外部?

解　不一定，三种可能性都有. 我们构造实例来表明这一点.

(1) 取凸四边形为正方形，则其中心到四顶点的距离相等.

(2) 以线段 AB 为直径作半圆，在半圆周上取两个异于A, B 的点，得一四边形，则 AB 中点到四顶点之距离相等.

(3) 以线段 AB 为直径作半圆. 在圆周上取四个异于 A, B的点，得四边形，则 AB 中点（在四边形外）到四个顶点的距离都相等.

有时，构造实例是论证中不可缺少的一个组成部分.

例 12　设有 n 个实数，满足$|x_i|<1$　$(i=1,\cdots,n)$. $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=19+|x_1+\cdots+x_n|$，试确定 n 的最小值.

解　我们分两步来解. 第一步，估计出n的一个精确的下界.

由$|x_i|<1$，$i=1,\cdots,n$，易有$\sum_{i=1}^{n}|x_i|-\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|x_i|<n$.

结合已知等式，可得 $n>19$.

第二步，应该猜想到 n 的最小值为 20，我们构造实例以表明 $n=20$ 时问题有解. 取

$$x_i=\begin{cases}0.95 & (\text{当 } i \text{ 为奇数时}),\\ -0.95 & (\text{当 } i \text{ 为偶数时}).\end{cases}$$

这样的 x_i $(i=1,\cdots,20)$满足题设条件和已知等式，从而n的最小值为20。

习 题 3

1. 设 $0<a$，$b<1$，证明 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-a)^2}+\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2}\leqslant 2\sqrt{2}$。
2. 设 $a>0$，实数 x，y，z 满足 $x+y+z=a$，$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$。构造一个模型来证明，$0\leqslant x$，$y$，$z\leqslant\frac{2}{3}a$。
3. 正数x，y，z 满足方程组

$$\begin{cases}x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25,\\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=9,\\ z^2+xz+x^2=16,\end{cases}$$

   求 $xy+2yz+3xz$ 的值。
4. 证明，当 $n=1,2,\cdots$时，$[(\sqrt{2}+1)^n]$轮流取偶、奇数。
5. 设 n 为大于 2 的自然数，证明下述论断仅对 $n=3$ 和 $n=5$ 成立：对任意实数 $a_1,\cdots,a_n$，都有

$$\begin{aligned}&(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)\\&+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)+\cdots\\&+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\leqslant 0.\end{aligned}$$

第4讲　构造性解题方法(二)

余 红 兵

处理存在性问题通常有两种类型的论证．一种称为“非构造性证明”，例如用抽屉原理作出的证明都是非构造性的(四只苹果放入三个抽屉，我们知道至少放了两个苹果的抽屉一定存在，但无法断定究竟是哪个抽屉)．另一种称为“构造性证明”，就是通过构造所要的对象的方法进行证明．构造性证明通常都有相当的技巧，要求解题者具备一定程度的知识、经验和技能．请通过下面的例子领略构造方法的特色．

例1　设正整数 m，n 都可以表示成两个整数的平方之和，则 mn 也能表示成两个整数的平方之和．

证　条件意味着有整数 x_1, y_1, x_2, y_2，使

$$m = x_1^2 + y_1^2,\quad n = x_2^2 + y_2^2.$$

要证明存在整数 a，b 使 $mn = a^2 + b^2$，我们直接构造 a，b 来证明这一点．

注意有恒等式

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = (x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2.$$

这就表明，可以取 $a = x_1x_2 + y_1y_2$，$b = x_1y_2 - x_2y_1$．

例2　给定自然数 $n \geqslant 2$，证明：方程 $x^2 + y^2 = z^n$ 一定有正整数解．

证　设 $w = a + bi$，a，b 是两个正整数，则 $w^n = x_1 + y_1 i$，这里 x_1，y_1 都是非零整数．注意等式

$$(|w|^2)^n = |w^{2n}| = |w^n|^2,$$

因而得到

$$(a^2 + b^2)^n = x_1^2 + y_1^2.$$

取 $z = a^2 + b^2$，就得到 $x^2 + y^2 = z^n$ 的一组正整数解．

例 3 证明：不定方程 $x^3+y^3=z^2$ 有无穷多组正整数解(x, y, z).

证 观察得到一组解 $x=1$，$y=2$，$z=3$. 再注意等式

$$(xd^2)^3+(yd^2)^3=(zd^3)^2.$$

这样，如果 (x_0, y_0, z_0)是一组正整数解，则对任意正整数 d，(x_0d^2, y_0d^2, z_0d^3)也是一组解. 我们已经得到一组解$(1,2,3)$，故可得到无穷多组正整数解.

例 4 证明：任何整数都可以表示成五个整数的立方和.

证 我们有恒等式

$$6x=(x+1)^3+(x-1)^3+(-x)^3+(-x)^3.$$

这样，一个整数若是 6 的倍数，则一定可表为四个整数的立方和，结论成立(取一个数为零).

对于一般情形，可把整数按模 6 分类，仍借助上面的恒等式来证.

当 $n=6k\pm1$ 时，结论显然；当 $n=6k\pm2$ 时，改写成 $n=6(k\mp1)\pm2^3$即得；当 $n=6k+3$ 时，改写为 $n=6(k-4)+3^3$ 同样得证.

另一个直接的证法是，注意到 $n-n^3$ 总是 6 的倍数，又有等式

$$n=6\cdot\frac{n-n^3}{6}+n^3.$$

把$\frac{n-n^3}{6}$当作恒等式中的 x 即可.

以上诸例的解答都有一个显著的特点，就是构造一个与问题紧密相关的恒等式来达到目的. 构造恒等式的能力，很大程度上讲，依赖于分解因式的基本功. 这方面的良好训练无疑是重要的.

利用几何图形来构造，也是一种用得上的方法. 这要求解题者根据问题的特点，联想出有关的几何图形.

例 5 设 a,b,c,d 都是正数，证明，存在一个三角形，其三边之长分别为

$$\sqrt{b^2+c^2},\ \sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd},\ \sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}.$$

并计算这个三角形的面积.

证 用判别三线段构成三角形的充要条件来验证并不容易，再用海伦公式计算三角形面积就更为困难. 我们采用构造的方法直接把所要的三角形作出来(注意给出的数的特点).

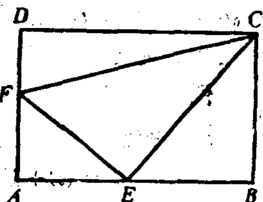


图 4-1

如图 4-1，以 $a+b, c+d$ 为边作一个矩形 $ABCD$，$AE=b$，$AF=c$，则由勾股定理，得到

$$CE=\sqrt{a^2+(c+d)^2},\ CF=\sqrt{(a+b)^2+d^2}, EF=\sqrt{b^2+c^2}.$$

这样，$\triangle CEF$ 就是满足条件的三角形.

其面积明显地等于矩形面积减去三个直角三角形的面积，易知为 $\frac{1}{2}(ac+bc+bd)$.

例 6 设边长为 a, b, c 的三角形是锐角三角形. 证明，存在一个四面体，其每组对棱都相等且分别等于 a，b，c，并计算这个四面体的体积.

证 我们通过作出所说的四面体的方法来证明.

由于 a，b，c 构成锐角三角形，所以 $a^2+b^2-c^2>0$，$b^2+c^2-a^2>0$，$a^2+c^2-b^2>0$. 作一个长方体，三度分别取为

$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}},\ y=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}},$$

$$z=\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}.$$

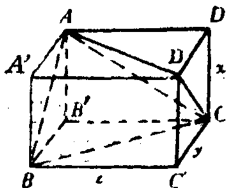


图 4-2

如图 4-2，连结长方体诸面的对角线，得到四面体 $ABCD$.

由勾股定理，有 $AC=\sqrt{\overline{D'A}^2+\overline{D'C}^2}=\sqrt{x^2+z^2}=a$.

同理　　　　$BD=a$，$AB=CD=b$，$AD=BC=c$.

这样的四面体 $ABCD$ 符合条件. 其体积等于长方体的体积减去四个小四面体的体积，易计算出是

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}.$$

注　如果所说的四面体存在，则 a，b，c 必然构成锐角三角形. 读者可自行补证这一结论.

例 7　证明：存在一个无理数 α，使得$[\alpha^n]\equiv-1(\bmod k)$对所有 $n\geqslant1$ 成立. 这里 $k\geqslant2$，是给定的正整数.

证　我们来创造一个符合要求的无理数 α. 这时第 3 讲的例10将有所帮助.

取 $\alpha=k+\sqrt{k(k-1)}$ 是方程 $x^2-2kx+k=0$ 的一个根，方程的另一个根为 $\beta=k-\sqrt{k(k-1)}$，$0<\beta<1$.

注意$(k-1)^2<k(k-1)<k^2$，故 α 是无理数.

设 $u_m=\alpha^n+\beta^n$，$n\geqslant1$，象第 3 讲中例 10 那样得出 $u_{n+1}=2ku_{n+1}-ku_n$，$(n\geqslant1)$. 由此归纳得出 u_n 都是整数且 $u_n\equiv0(\bmod k)$. 另一方面$[\alpha^n]=u_n-1$，从而 $[\alpha^n]+1=u_n\equiv0\pmod k$.

例 8　给定自然数 $n>2$，证明平面上存在满足下述条件的 n 个点：

(1) 任意三点不共线；

(2) 任意两点的距离是无理数；

(3) 任意三点构成的三角形的面积为有理数

证　我们来构造出符合条件的 n 个点. 注意，如果没有条件(1)，则在一条直线上适当地选择点就够了(每三点构成的三角形是退化的，面积为零). 为了满足条件(1)，可以把直线适当"弯曲"一下，例如考虑抛物线 $y^2=x$ 上的点 $P_k(k^2,\ k)(k=1,$

$\cdots, n$)，这就符合要求.

(1) 由于抛物线是凸的，所以任意三个不同点 P_i, P_j, P_k 不共线(也可以用行列式的知识来证).

(2) 任意两点 P_i，P_j 的距离是

$$\sqrt{(i^2-j^2)^2+(i-j)^2}=|i-j|\cdot\sqrt{(i+j)^2+1}.$$

由于
$$(i+j)^2<(i+j)^2+1<(i+j+1)^2,$$
所以 $\sqrt{(i+j)^2+1}$ 是无理数. 因此 $|P_iP_j|$ 是无理数.

(3) $\triangle P_iP_jP_k$ 的面积的绝对值等于

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ i^2 & j^2 & k^2\\ i & j & k\end{vmatrix}$$

的绝对值. 显然，它是一个有理数.

例 9 对于每个正整数 n，$n>1$，考虑其素因数 p 的不超过 n 的最高次幂，称所有这些幂的和为 n 的幂和(例如 100 的幂和为 $2^6+5^2=89$). 证明，有无穷多个正整数，它的幂和大于这个数本身.

证 我们构造无穷多个正整数具有所说的性质，下面的论证实际上也表明了构造方式的来源.

设 $n>1$，$p_1, \cdots, p_k$ 是它的全部素因数. 所谓的不超过 n 的最高次幂，就是满足不等式

$$p_i^{\alpha_i}\leqslant n<p_i^{\alpha_i+1}$$

的 $p_i^{\alpha_i}(i=1,\cdots,k)$. 设 n 的幂和为 $f(n)$，则

$$\frac{f(n)}{n}=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i}\right).$$

我们来寻求一个充分条件，以使 $f(n)>n$. 由上式

$$\frac{f(n)}{n}=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i}p_i^{\alpha_i+1}\right)>\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{p_i}\right)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i}.$$

因此，只要 $\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i}>1$，就一定有 $f(n)>n$. 注意 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$

>1，这样只要2，3，5都是n的素因子，则$f(n)>n$. 我们可以取$n=(2\times3\times5)^k$，$k=1$，2，…，为符合要求的整数.

另一种构造方法如下：

设p是大于2的素数，考虑$f(2p)$，注意一定有正整数k，使得

$$2^k<p<2^{k+1},$$

因此

$$2^{k+1}<2p<2^{k+2}.$$

这样不超过$2p$的2的最高次幂为2^{k+1}，又不超过$2p$的p的最高次幂显然是p($2p$的素因数只有2和p)，所以$f(2p)=2^{k+1}+p>p+p=2p$.

我们取$n=2p$，p是素数，此即符合要求的数. 因为素数有无穷个，所以这样的数有无穷个.

以上三个问题都有一定的难度，要求解题者了解一些有关的背景材料. 此外，例8及例9的解法也值得注意，它们都包含了"退一步考虑"的想法.

在构造性证明中，还有一种所谓的"奇偶构造法"，即利用奇偶性来构造，见下例.

例10 平面直角坐标系中，横纵坐标都是整数的点称为整点. 试设计一种方法将所有的整点染色，每一个整点染成白色、红色或黑色中的一种颜色，使得：

(1) 每一种颜色出现在无穷多条平行于横轴的直线上；

(2) 对任意白点A，红点B和黑点C，总可以找到一个红点D，使得$ABCD$为平行四边形. 证明你设计的方法符合上述要求.

证 在平行四边形四个顶点A，B，C，D中，红点两个，黑、白点各一个，因此染色时，红点应多染，黑、白点宜对等. 染色的方法之一是把每个整点的横、纵坐标按奇、偶性分类：

(奇，奇)染白，(偶，偶)染黑，(奇，偶)和(偶，奇)都染红.

这样，要求(1)是满足的，且三种颜色不在一直线上．因若白点$A(x_1, y_1)$，红点$B(x_2, y_2)$，黑点$C(x_3, y_3)$三点共线，则

$$(y_2-y_1)(x_3-x_1)=(y_3-y_1)(x_2-x_1).$$

因(x_3-x_1)，(y_3-y_1)都是奇数，而(y_2-y_1)，(x_2-x_1)一奇一偶，故上式左边为奇数，右边为偶数，不可能．

另一方面，取$x_4=x_1+x_3-x_2$，$y_4=y_1+y_3-y_2$，则x_4，y_4一奇一偶，故$D(x_4, y_4)$染红色．由中点公式，明显地，$ABCD$是平行四边形．

例11 设$f(x)=4x-x^2$，给定实数x_0，考察由$x_n=f(x_{n-1})$ $(n\geqslant1)$定义的数列$\{x_n\}(n\geqslant0)$．证明，有无穷多个x_0，使得由此确定的$\{x_n\}(n\geqslant0)$中只有有限个互不相同的项．

分析 观察(加上灵机一动)可以看出：

当$x_0=0$时，得数列0，0，…．

解$4x-x^2=0$，得$x=0$或4．当$x_0=4$时，得到数列4，0，0，…．

解$4x-x^2=4$，得$x=2$．当$x_0=2$时，得数列2, 4, 0, 0, …．

解$4x-x^2=2$，得$x=2\pm\sqrt{2}$，可得数列$2+\sqrt{2}$，2，4，0，0，…；及$2-\sqrt{2}$，2，4，0，0，…．

这样当x_0取为$a_1=4$，$a_2=2$，$a_3=2+\sqrt{2}$时，相应的数列都具有所说的性质．一般地，设$x_0=a_n$时，相应的数列有所说的性质，则可期望由$f(a_{n+1})=a_n$确定a_{n+1}，使得当$x_0=a_{n+1}$时相应的数列也具有所说性质．解出$a_{n+1}=2\pm\sqrt{4-a_n}$．注意当$a_n\leqslant4$时，a_{n+1}才是实数．

这样，我们可期望归纳构造出一个各项不同的数列$\{a_n\}(n\geqslant1)$，使当$x_0=a_k$时，相应的数列至多有有限个不同项(如果这一点已完成，则立刻导出结论，因假设只有有限个符合要求的x_0值，设有l个，则让x_0取a_1，…，a_{l+1}时，就已得到$l+1$个符合要求的数列，矛盾)．

至于要求 $a_n \leqslant 4$，则可通过加强归纳假设来实现.

证 取 $a_1=4$，则当 $x_0=a_1$ 时，得数列 a_1，0，0，…，只有一个不同项.

假设 a_k 已作出，$0<a_k\leqslant 4$，a_k 和它前面所有的项不同，并且当 $x_0=a_k$ 时，相应的数列为 a_k，…，a_1，0，0，…（有 k 个不同项）. 从 $f(a_{k+1})=a_k$ 解出，$a_{k+1}=2+\sqrt{4-a_k}$，则有 $0<a_{k+1}\leqslant 4$. a_{k+1} 必和前面的项都不同，它显然不等于 a_1（否则 $a_k=0$）. 如果 $a_{k+1}=a_i$，$2\leqslant i\leqslant k$，则由归纳假设得 $2+\sqrt{4-a_k}=2+\sqrt{4-a_{i-1}}$，推出 $a_k=a_{i-1}$，与归纳假设矛盾.

又当 $x_0=a_{k+1}$ 时，相应的数列 $\{x_n\}$ $(n\geqslant 0)$ 为 a_{k+1}，a_k，…，a_1，0，0，…（有 $k+1$ 个不同项）.

这样，我们归纳构造出了上面所说的数列 $\{a_n\}(n\geqslant 1)$.

习 题 4

1. 给出构造性的证明：存在两个正无理数 a，b，使 a^b 为有理数.
2. 证明：任何正有理数可以表示成若干有理数的平方和.
3. 证明：存在一个整系数多项式 $P(x)$，它对于区间 $\left[\frac{1}{10},\ \frac{9}{10}\right]$ 中的一切 x 值，有

$$\left|P(x)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{10^3}.$$

4. 设有数列 $\{a_n\}(n>1)$，a_1 是自然数，$a_n=\left[\frac{3}{2}a_{n-1}\right]+1(n\geqslant 2)$. 问是否存在 a_1，使这个数列的前 10^5 项都是偶数，而第 10^5+1 项是奇数？
5. 试给出例 10 的一个不同解法.
6. 用两种颜色给一个圆周染色，使圆周上每一点染上这两种颜色之一. 证明：存在一种染法，使得任何内接于圆的直角三角形的三个顶点不都是同一种颜色.

第5讲　形式逻辑简易知识

余 红 兵

我们通常所说的逻辑学主要指形式逻辑，它是研究人们的思维形式及其规律的科学．逻辑学是一切推理的基础，一个不懂基础逻辑的学生是没有能力学好数学的．这里，我们主要介绍初等数学中所涉及的基本的逻辑知识．

一、命题的四种形式

判断一件事情的语句，称为命题．它的假设事项称为前提，其断言称为结论．一个命题可以为真(称为真命题)，也可以为假(称为假命题)．在数学中，如果一个命题的真实性是证明出来的，即由公理以及其他已由公理证明为真实的命题经过逻辑推理而得出，就称其为定理．此外，要表明一个命题不真的基本方法是作出一个符合命题的前提而命题的结论不成立的实例．

命题有下述四种形式：

(1) 原命题：若 A，则 B．(2) 逆命题：若 B，则 A．

(3) 否命题：若 $\overline{A}$，则 $\overline{B}$（$\overline{A}$ 是否定 A 的意思，读作“A否”或“非A”）．

(4) 逆否命题：若 $\overline{B}$，则 $\overline{A}$．

既然命题可真可假，上述四种命题之间，它们的真假关系怎样呢？下面看几个例子：

例 1　原命题：三角形中，若两边相等，则对角也等．(真．)

逆命题：三角形中，若两角相等，则对边也等．(真．)

否命题：三角形中，若两边不等，则对角也不等．(真．)

逆否命题：三角形中，若两角不等，则对边也不等．(真．)

例 2　原命题：若两角是对顶角，则它们相等．(真．)

逆命题：若两角相等，则它们是对顶角.（假.）

否命题：若两角非对顶角，则它们不等.（假.）

逆否命题：若两角不等，则它们不是对顶角.（真.）

例3 原命题：两个实数都是无理数，则它们的积也是无理数.（假.）

逆命题：两个实数的积为无理数，则这两个实数都是无理数.（假.）

否命题：两个实数不全是无理数，则其积不是无理数.（假.）

逆否命题：两个实数的积不是无理数，则这两个实数不全是无理数.（假.）

从这些例子可以看出，原命题和逆命题、否命题和逆否命题可以都真，可以都假，也可以一真一假. 但是，原命题和逆否命题，逆命题和否命题同真、同假，即是等价的.

二、充分必要条件

当一个命题及其逆命题都为真时，即

(1) 若 A，则 B. (2) 若 B，则 A.

都真实时，我们说 A 是 B 成立的充分必要条件，详细言之，如由 A 能推出 B，称 A 为 B 成立的充分条件；如由 B 又能推出 A，称 A 是 B 成立的必要条件（自然，B 是 A 成立的充分条件）.

例4 三角形为直角三角形的充分必要条件是一边的平方等于另两边的平方和.

例5 两个三角形面积相等是它们全等的必要但不充分条件.

三、三段论推理

以上我们介绍了命题、命题的四种形式以及充分必要条件的概念. 现在我们谈谈证明命题的两种基本方法，即演绎法和归纳法. 大致地说，演绎法是用已知的普遍的事理推断某特别事理的成立，是从一般到特殊的推理. 而归纳法则是从特殊事情的成立

推出普遍事理的推理方法．我们主要讲演绎法．

演绎法的核心就是所谓的三段论推理．其形式是：首先认可一个一般事实，称为大前提．然后提出一个和大前提有联系的特殊事情，叫做小前提．最后根据这两个前提得出结论（即作出判断）．

例6 证明：二次方程 $x^2-2x+1-a^2=0$ 有两个不等实根（a 是不等于零的实数）．

证 （大前提）若实系数二次方程的判别式大于零，则它有两个不等实根．

（小前提）所给的二次方程是实系数的，且它的判别式为 $4-4(1-a^2)=4a^2>0$（因 $a\neq0$）．

（结论）所以这个二次方程有两个不等实根．

上面的三段论推理具有以下一般的推理形式（也是初等数学中最常用的模式）：（大前提）所有 B 都是 C，（小前提）A 是 B，（结论）因此 A 是 C．

例7 设 a 是不等于1的实数，证明：$y=\dfrac{x-1}{ax-1}$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称．

证 （大前提）因 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，

（小前提）$y=\dfrac{x-1}{ax-1}$（$a\neq1$）的反函数就是它本身，

（结论）所以 $y=\dfrac{x-1}{ax-1}$（$a\neq1$）的图象关于直线 $y=x$ 对称．

注 上面的小前提必须证明，大前提也不应省略．

在应用三段论推理时，要特别注意：(1) 大前提必须正确；(2) 小前提（通常要证明）必须证明；(3) 在应用上面的推理模式时，不可把大前提中的 B，C 的位置颠倒（否则会犯“推不出”的逻辑错误，即论据不足）．

演绎推理通常包含若干步，每一步分析起来都是三段论推理的形式．它的过程实际上是一串前后连贯的三段论推理．但在进行论证时，为了使过程叙述简化，我们常把各步推论的两个前提（通常是大前提）省略一个．但要注意各个推理间的逻辑关系，以免犯逻辑错误．

四、反证法

有的命题往往不易从原命题直接证明，这时我们常常改为证明其逆否命题（注意这两者等价），也能间接地达到目的．这个方法称为反证法．详细地说，就是，欲证明“若 A，则 B”而不易入手时，可以改为证明其逆否命题“若 $\overline{B}$，则 $\overline{A}$.”即证明：$A, \overline{B}$，以及已知公理，已知定理四者不相容．这样，结论一假，便产生矛盾．因此结论不能为假，从而必然为真（根据排中律，即两个相矛盾的事不能都是假的，必然一个为真）．

用反证法论证时，有两件事是很基本的．其一是，必须正确地写出否命题；其二是，应该把否命题当作“条件”来用．我们只谈第一件事．

例 8 否定命题：$y=f(x)$的图象上任意两个不同点的连线不平行于 x 轴．

错解 $y=f(x)$的图象上任意两个不同点的连线平行于x轴．

正解 $y=f(x)$的图象上存在两个不同点的连线平行于x轴．

注意，“全称命题”的否定应该是“存在命题”，即对“任意两个不同点”的否定应是“存在两个不同点”．

例 9 否定命题：任意四面体一定存在一个顶点，从这点引出的三条棱能构成三角形．

解 应该把命题中打着重号的部分都否定掉，即“存在一个四面体，其任何顶点引出的三条棱都不能构成三角形”．

五、错误的推理

下面我们看几个错误推理的例子．

例 10 证明：边长分别为 3，4，5的三角形是直角三角形．

错证 (1) 凡是直角三角形，必有一边的平方等于另两边的平方和．

(2) 这个三角形中，$5^2=3^2+4^2$，所以有一边的平方等于另两边的平方和．

(3) 所以这个三角形是直角三角形．

分析 证明中作为大前提的 (1) 中的断言是对的，但推理不对，即得不出(3)．它违反了第三节中所说的三段论推理模式(把大前提中 B 和 C 的位置颠倒了)．正确的三段论推理应该以三边长构成直角三角形的充分条件，即"若一个三角形中有一边平方等于另两边的平方和，则它是直角三角形"作为大前提．

例 11 设 a,b,c 是一个三角形的三边长，证明：长为 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ 的线段构成锐角三角形．

错证 (1) 设长为 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ 的边所对的角依次为 A，B，C．

(2) 由于 a，b，c 是三角形的三边长，所以有 $b+c>a$．

$$\cos A=\frac{(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2-(\sqrt{a})^2}{2\sqrt{bc}}=\frac{b+c-a}{2\sqrt{bc}}>0.$$

因此 $0<A<\frac{\pi}{2}$．同理，$0<B,C<\frac{\pi}{2}$．故$\triangle ABC$是锐角三角形．

分析 问题中的结论包含两部分，其一要证构成三角形，其二才是证明它为锐角三角形(与例 10 不同)．证明中的(1)实际上已承认了长为$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ 的线段构成了三角形．因此上面的证明是不正确的．

例 12 证明：任给五个不同整数，必然能取出两个不同的，使它们的差为 4 的倍数．

错证 反证法：(1) 假设结论不对，则任取五个不同整数，它们任两个的差都不是 4 的倍数；

(2) 现在取五个整数：1, 2, 3, 4, 5, 但 $5-1=4$ 是 4 的倍数. 与假设矛盾，故结论成立.

分析 错误在于(1)，否命题写错了. 应该是"存在五个不同整数，它们任两个的差都不是 4 的倍数". (2) 中的例子只不过验证了结论的正确.

例 13 确定实数 k 的范围，使方程 $x^2+(2k-1)x+k^2=0$ 有两个大于 1 的根.

错解 设两个根为 x_1，x_2，则有

$$\begin{cases} x_1+x_2>2, \\ x_1x_2>1, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} -(2k-1)>2, \\ k^2>1. \end{cases}$$

解得 $k<-1$，就是所求的范围.

分析 问题的实质是确定所给的方程两根都大于 1，k 应满足的充分必要条件. 上面解答中所列的 $\begin{cases} x_1+x_2>2, \\ x_1x_2>1 \end{cases}$ 仅是两根 x_1，x_2 都大于 1 的必要条件，并不充分. 我们应当先寻找使 x_1，x_2 都大于 1 的充分必要条件. 由

$$\begin{cases} \text{判别式} (2k-1)^2-4k^2\geqslant 0, \\ (x_1-1)+(x_2-1)>0, \\ (x_1-1)(x_2-1)>0 \end{cases}$$

解出 $k<-2$，为所求的范围.

例 14 设 $\triangle ABC$ 为直角三角形，$\angle C$ 是直角. 证明：$AB^2=AC^2+BC^2$.

错证 用解析法. 建立直角坐标系，取 C 为坐标原点，A，B 分别位于 x 轴，y 轴的正方向上. 设 $A(a, 0)$，$B(0, b)$，则 $|AC|=a$，$|BC|=b$. 由两点间距离公式，

$$|AB|^2=(a-0)^2+(0-b)^2=a^2+b^2=|AC|^2+|BC|^2.$$

分析 证明犯了循环论证的错误，因为两点间的距离公式等价于勾股定理，用了距离公式，无形中已承认了结论成立.

例 15 证明：$y=x^2$ 的图象上任两个不同点，或者关于 y 轴对称，或者这两点的连线不平行于 x 轴.

错证 如果图象上两个不同点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$关于 y 轴对称，则 A，B 连线显然平行于 x 轴. 但图象上任两点的连线或者平行于 x 轴或者不平行于 x 轴，因此图象上任两个不同点或者关于 y 轴对称，或者它们的连线与 x 轴不平行.

分析 两点关于 y 轴对称是它们的连线平行于 x 轴的充分条件，但并非必要条件. 上述证明并未说明：若两点连线平行于 x 轴，这两点是否一定关于 y 轴对称(论证的核心正在于此).

正确的证明程序应是：证明两个不同点关于 y 轴对称的充分必要条件是它们的连线平行于 x 轴.

习 题 5

1. 写出命题"如果一条直线和一个平面内任何一条直线都垂直，则这条直线和这个平面垂直"的逆命题，否命题及逆否命题.
2. 指出下述命题的符合逻辑的证明程序：
   空间三个平面 α，β，γ，设 a，b，c 分别是 α 和 β，α 和 γ 以及 β 和 γ 的交线，证明 a，b，c 或者两两平行，或者相交于一点.
3. 指出下述命题的符合逻辑的证明程序：
   设$\{a_n\}$(n 是自然数)是等比数列，a_n 都是实数，设$S_n=a_1+\cdots+a_n$($n\geqslant 1$). 证明：数列$\{S_n\}$(n 是自然数)中或者任一项都不是零，或者有无穷多个项都是零.
4. 命题"到三角形三顶点距离都相等的点一定是三角形的外心"是否正确？如果正确，给出证明，否则举出反例.
5. 指出下面论证中的错误并给出正确证明：
   证明：对角线相等的平行六面体是长方体.
   错证(1) 长方体的对角线相等，它们都等于三度的平方和.
   (2) 所以不是长方体的平行六面体的对角线不相等.
   (3) 因此对角线相等的平行六面体是长方体.

第6讲 通过逻辑趣题学推理

余红兵

我们知道，在进行数学思考的时候，离不开逻辑推理．因此锻炼自己的逻辑推理能力就是非常必要的事情．此外，有些看上去很难的数学问题，实际上只需要很少的数学知识，用逻辑推理就能解答(但不见得人人都能想到)．下面我们通过一些趣味逻辑(和数学)的例题来说明推理中的基本方法．这些方法在解数学题时，也是经常使用的．

例1 有三个箱子分别涂上红、黄、蓝三种颜色，一个苹果放入其中某个箱子内，并且

(1) 红箱盖上写着："苹果在这箱子里"；

(2) 黄箱盖上写着："苹果不在这箱子里"；

(3) 蓝箱盖上写着："苹果不在红箱子里"．

已知(1)，(2)，(3)中只有一句是真的，问苹果在哪个箱子里？(如果判断对了，苹果就归你．)

解 关键在于(1)与(3)是矛盾的．按"矛盾律"，两件矛盾的事，不能都是真的，必有一假；按"排中律"，它们又不能都假，必有一真．从而(1)，(3)中有一句真话、一句假话(但是还不能判断哪一句为真)．

既然真话只有一句，这样就推出(2)必然是假话，从而苹果在黄箱子里．

例2 A,B,C,D 四人对 E 先生的藏书数目作一个估计．

A 说："E 有五百本书．"

B 说："E 至少有一千本书．"

C 说："E 的书不到二千本．"

D说："E最少有一本书."

这四个估计中只有一句是对的，问E先生究竟有多少本书？

解 首先，A说的不对，否则C，D说的也对，与已知"只有一句是对的"矛盾.

同理，B说的也不对，否则D就说对了.

注意到B和C的估计至少有一个是正确的，按已知条件又只有一个是对的，已证明了B说的不对，所以C必然对.

再由已知条件就推出D的话不对，所以E先生一本书也没有.

例3 一位妇女以及她的弟弟、儿子和女儿都是棋手，其中有一个最差的棋手与一个最好的棋手. 已知：

(1) 最差的棋手的孪生者和最好的棋手是异性；

(2) 最差的棋手与最好的棋手同龄.

问：哪两个人同龄？

解 本题宜以推断谁是最差的棋手入手. 我们用A表示这位妇女，她的弟弟、儿子、女儿分别记为弟、子、女. 注意，最差的与最好的棋手各有一个.

如果A最差，则弟为其孪生者，从而女最好（根据(1)），所以A、女同龄(由(2))，矛盾.

如果弟最差，则A为孪生者，从而子最好（由(1)），所以弟、子同龄，这样A、子同龄，(因A和弟孪生)，矛盾.

如果女最差，则子为孪生者. 所以A最好，推出A、女同龄，矛盾.

因此子是最差棋手，从而女为孪生者，所以弟是最好的棋手(由(1))；再由(2)，可知弟、子同龄.

注 如果先考虑子，即设儿子是最差的棋手，推不出矛盾，并不能断定他就是最差的棋手. 上面推导的逻辑是：最差的棋手或者是A，或者是弟，或者是子，或者是女，我们证明不能是

A、弟、女，从而必然是子．

例4 有姐妹两人，在任一天中，姐姐在中午十二点之前都讲实话，而十二点之后全说谎话．妹妹和她恰好相反．某人（在白天）看望她们说，问："哪位是姐姐？"

瘦小姐和胖小姐都回答："是我．"

再问一次："现在几点了？"

胖小姐说："快到十二点了．"而瘦小姐却说："十二点早过了．"

问：当时是中午十二点前，还是十二点后？哪一位是姐姐？

解 假设当时是十二点后，那么下午要说假话的姐姐对于"哪位是姐姐"的回答应为"我不是姐姐"（我们尚不知哪位是姐姐）．但当时没有得到这个回答，所以当时是十二点前．

假设瘦小姐是姐姐，那么她对"现在几点钟了"的回答应是真话"十二点快到了"．然而她却说了谎话．所以，瘦小姐不是姐姐，胖小姐才是姐姐．

注 一种错误的解法是：预先假定当时是十二点前且胖小姐是姐姐，验证了这个假设与已知条件一致，就断言假设为真．这种错误与数学证明中的下述错误推理类似：

已知 A，求证 B．

错证一 设 B 成立，则 B 和 A 不矛盾（或者符合A），从而 B 成立．

错证二 设 B 成立，则 A 成立．已知 A，所以 B 成立．

"错证一"错在"理由不充足"，"错证二"实际上证明了逆命题，但这并不能保证原命题成立．

例5 一个 A 国旅行家首次来到甲、乙这两个相邻地区中的一地．他知道这两地的居民能听懂A 国的语言，但都不会讲．并且，甲地居民有一个与其他地区不同的习惯：对你的询问，他用摇头表示回答"对"；而用点头表示"不对"．现在旅行家遇到了一

个居民(他可能是甲地人，也可能是乙地人)，如果要了解自己处在两地中的哪一地，旅行家最少问几个问题可以确保达到目的?

解 如果旅行家精通逻辑学的话，问一句话就能确保达到目的："你居住在此地吗?"若居民摇头，则旅行家身处甲地；若居民点头，则旅行家在乙地.

如果这位居民是甲地人，则他摇头意味着回答"对"(从而此地是甲地)；如果这位居民是乙地人，则他摇头意味着回答"不对"(从而此地是甲地). 因这位居民或者是甲地人，或者是乙地人，所以旅行家必然身处甲地.

同样可证明，若答话的居民点头时，则旅行家必在乙地.

注 上面的推理称为"二难推理"，是一个很有用(包括在数学中)的推理形式，其最简单的模式为：

如果 A 那么 C，如果 B 那么 C.

或者 A，或者 B.

所以，C.

例 6 证明存在两个正无理数 a，b，使 a^b 为有理数.

证 注意$\sqrt{2}$是无理数. 如果$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$是有理数，则结论成立. 如果$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$不是有理数，则它是无理数(排中律)；这样$(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$就是有理数，结论也成立.

注 解答中的推理就有一个二难推理. 可以比较上面的模式以及例 5. 应注意到，我们没有确定$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$究竟是有理数，还是无理数.

例 7 设 S 为满足下列条件的有理数集合：

(1) 若 $a\in S$，$b\in S$，则 $a+b\in S$，$ab\in S$.

(2) 对任一个有理数 r，三个关系 $r\in S$，$-r\in S$，$r=0$，有且仅有一个成立.

证明：S 是由全体正有理数组成的集合.

证 设 $r\neq 0$，为任一个有理数，则 $r\in S$ 或者 $-r\in S$ (根据

条件(2))，再由(1)，若$r\in S$，则$r^2\in S$；若$-r\in S$，则$r^2=(-r)\cdot(-r)\in S$. 总之$r^2\in S$. (二难推理!)

取$r=1$，则$1\in S$. 由(1)，$2=1+1\in S$，$3=1+2\in S,\cdots$，可知全体正整数都属于S.

设p，q为两个正整数，则由上面的证明可知$\frac{1}{q^2}\in S$. 但$pq\in S$，所以由(1)，$\frac{p}{q}=pq\left(\frac{1}{q^2}\right)\in S$.

因此，S含有全体正有理数. 再由(2)知，0及全体负有理数不属于S 即S是由全体正有理数组成的集合.

注 错误的证明是，假设S由全体正有理数组成，验证此时条件(1)，(2)成立，便断言结论的正确. 参见例4的注.

例8 某个俱乐部的成员有两种人：一种是永远说实话的老实人，另一种是总说假话的骗子. A先生去访问的时候，他们全都围着圆桌吃午饭. 他问每个人："你是不是骗子？"结果每个人都回答"不是". 接着他又问每个人："你左邻那人是不是老实人？"结果回答仍全是否定的.

A先生回家后，忘了问他们共有多少人，就打电话问俱乐部主席，他回答说有23人，挂上电话后，A又想到忘了问主席是不是骗子，只好重打电话. 这一次，接电话的是个秘书. 他得知A先生的意思后说："不，不！桌边应有24人. 我们的主席是个骗子，他的话怎么能信？"

试确定这个俱乐部有多少人？

解 注意，秘书可能是一个骗子. 但明显地，主席和秘书一个是老实人，一个是骗子.

解题的关键是从A先生的问话及得到的回答考虑. 第一个问题实际上没有意义，因为无论是老实人还是骗子对"你是不是骗子"的回答都应是否定的(二难推理).

第二个问题得到了全部否定的回答，这表明圆桌边的人必然是骗子及老实人相互间隔地排列，否则，总要有某个人作肯定的回答．这样不难得知人数是偶数．但主席说有 23 人，是一个奇数，从而推出主席必定是骗子．因此秘书便是老实人，而人数为 24 人．

例 9 国际数学奥林匹克的评议会有 17 个国家参加，每个国家有领队和副领队各一人与会，会前某些与会者握了手，但领队与他的副手不握手．会后，A 国领队问每个与会者，他们的握手次数是多少．各人的回答都不相同．问 A 国的副领队与多少个人握了手？

解 每人至多握 32 次手．除 A 国领队外，33 个人的握手次数各不相同，所以他们的握手次数分别为 0，1，2，…，32．设握手次数为 k 次的人为 $t_k(k=0, 1, 2, \cdots, 32)$．

首先看 t_{32}．他和其他国家的代表都握过手，只有 t_0 没有和他握手．这样 t_{32} 和 t_0 必是同一国的代表．

除去 t_{32} 和 t_0 后，各国代表的握手次数都恰好减少一次，仍然互不相同(除 A 国领队外)，这样根据上面的推理知，t_{31} 和 t_1 是同一国代表．类似地，t_{30} 和 t_2，t_{29} 和 t_3，…，t_{17} 和 t_{15} 同属于一国，所以 A 国的副领队握了 16 次手．

例 10 某国的居民不是骑士就是无赖，骑士不说谎，无赖永远说谎．我们遇到该国居民 A，B，C．A 说："如果 C 是骑士，则 B 是无赖．"C 说："A 和我不同，一个是骑士，一个是无赖．"这三个人中，谁是骑士，谁是无赖？

解 我们证明 A 不是骑士．假如相反的话，当 C 为骑士时，按 C 的话(为真！)，C 与 A 应不同，矛盾．当 C 为无赖时，C 的话应不真，但此时的情况又符合 C 所说的话，矛盾．故 A 一定是无赖．(二难推理！)至此尚不知道 C 是否为骑士．

这样，A 的话应是假的．如果 C 不是骑士，则 A 的话中的

前提为假，从而他的陈述永远为真，矛盾．所以 C 是骑士．再根据 A 的话知，B 也是骑士．

例11 设 $n\geqslant 15$ 是自然数，A，B 都是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的真子集，$A\cap B=\phi$，且 $\{1, 2, \cdots, n\}=A\cup B$．

证明：A 或者 B 中必有两个不同数的和为完全平方数．

证 用反证法．假设结论不对，则存在 $\{1,2, \cdots, n\}$ 的两个真子集，$A\cap B=\phi$ 且 $\{1, 2, \cdots, n\}=A\cup B$，使得无论是 A 还是 B 中的任两个不同数的和都不是完全平方数．

我们将推出矛盾．

不妨设 $1\in A$，则 $3\notin A$，否则 $1+3=2^2$，与假设矛盾，从而 $3\in B$（排中律！）．同样，$6\notin B$，所以 $6\in A$，这样 $10\notin A$，即 $10\in B$．因 $n\geqslant 15$，而 15 或者在 A 中，或者在 B 中．但当 $15\in A$ 时，因 $1\in A$，$1+15=4^2$，矛盾；当 $15\in B$ 时，因 $10\in B$，$10+15=5^2$，仍然矛盾．（二难推理！）因此我们的假设不真，即结论成立．

注 读者可以比较本题及例 10 中推理的类似之处．

习 题 6

1．有四个立方体，每个立方体都按相同的顺序涂上黑、白、红、黄、蓝、绿六种颜色．现将四个立方体重叠在一起，只能看见它们的部分颜色（如图 6-1 所示）．

试从这个图，推断最上面一个立方体的下面、左两、后面各涂的是什么颜色？

2．A，B，C，D，E 五人参加一次考试，试题有七道，都是判断题，记分规则是：对每道题，答对了得 1 分，答错了倒扣 1 分，不回答的不得分也不扣分．图 6-2 记录的是 A，B，C，D，E 五人做的答案，其中已知 A，B，C，D 各得了 2 分．问 E 应当得多少分？每个题目正确的答案是什么？

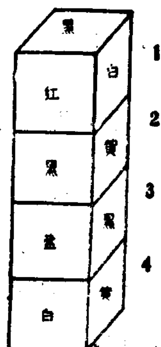


图 6-1

姓名 题号	A	B	C	D	E
1	√	√		×	√
2		×	√	×	√
3	×	√	×	×	×
4	√	√	×	√	
5	×	×	√	√	√
6	√	×	×		×
7	√		√	×	√

图 6-2

3. 三个游戏者 A，B，C 玩游戏如下：三张卡片上各写一个不同的正整数，设为 p，q，r，且 $0<p<q<r$. 把这三张卡片混合后，发给每个游戏者一张，然后按照卡片上的数字发给每个游戏者弹子. 接着把卡片收回，弹子仍留在游戏者处，等等. 整个游戏至少进行两轮(一轮要包括发放卡片，分发弹子，收回卡片). 最后一轮结束后，A，B，C 各得到 20，10，9 个弹子，而且已知 B 最后一轮得到 r 个弹子，问哪个游戏者第一轮得到 q 个弹子？

第7讲　面积题和面积法

杜 锡 录

面积是重要并且有趣的内容．在此我们当然不去谈论有关面积的深刻理论，而只简要地介绍属于中学内容的、与面积有关的问题，以及用面积方法来论证这一重要的想法．

一、和面积有关的问题

三角形的面积公式是中学里学过的最基本的面积公式，它有很多种形式，在不同场合下应当选择最便利的形式．以下用 $\triangle ABC$ 同时表示三角形 ABC 和它的面积(结合上下文应能区分含义)，a，b，c 分别表示角 A，B，C 所对的边长，a 边上的高记为 h_a，R 和 r 分别记为 $\triangle ABC$ 外接圆和内切圆的半径，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ 为 $\triangle ABC$ 的半周长，则有

三角形面积公式：

(1) $\triangle ABC=\frac{1}{2}ah_a$；

(2) $\triangle ABC=\frac{1}{2}ab\sin C$；

(3) $\triangle ABC=r\cdot p$；

(4) $\triangle ABC=\frac{abc}{4R}$；

(5) $\triangle ABC=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$．

我们提醒一下，公式(5)有一种变形，有时是非常有用的，值得记住，即

$$16(\triangle ABC)^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4.$$

证明并不难，只要把(5)式两边平方并用 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ 代入即可得到.

下面的例子都是与面积有关的，一些基本的原则我们将在解答中作注释.

例 1 设 G 是 $\triangle ABC$ 内部一点，且 $\triangle ABG$, $\triangle BCG$, $\triangle CAG$ 的面积相等. 证明：G 是 $\triangle ABC$ 的重心.

证 如图 7-1，过 G 作直线 l 平行于 AB. 由于 $\triangle ABG=\frac{1}{3}\cdot\triangle ABC$，这样利用面积公式(1)，可知 G 到 AB 的距离等于 C 到 AB 的距离的三分之一，所以直线 l 通过 $\triangle ABC$ 的重心.

同理，过 G 作 AC 的平行线也通过 $\triangle ABC$ 的重心. 所以这两条直线的交点(即 G)就是 $\triangle ABC$ 的重心.

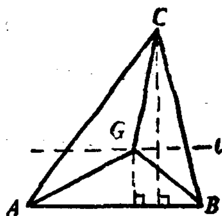


图 7-1

注 解答中我们利用面积公式把两个同底三角形的面积比转化成对应高的比. 这种通过面积导出线段比的方法经常有用. 下面的例子是美国的一道数学竞赛题，其解法和上例有着相仿的原则.

例 2 一个给定的凸五边形 $ABCDE$ 有下列性质：三角形 ABC, BCD, CDE, DEA, EAB 的面积都等于 1. 证明每个具有上述性质的不同五边形有相同的面积，且进而证明存在着无穷多个具有上述性质的五边形.

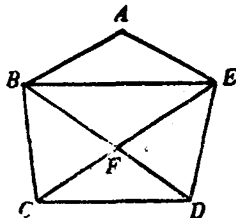


图 7-2

证 如图7-2，因为 $\triangle BCD=\triangle CDE=1$，而这两个三角形同底，从而按面积公式(1)，它们在 CD 上的高相等，这样 $BE\parallel CD$. 同理 $BD\parallel AE$, $CE\parallel AB$. 可知 $ABFE$ 是平行四边形. 这里 F 为 BD 及 CE 的交点，从而 $\triangle BFE=\triangle ABE=1$.

设 $\triangle FCD=x$，则$\triangle BCF=\triangle FED=1-x$.

不难求得
$$\frac{\triangle BCF}{\triangle CDF}=\frac{\triangle BFE}{\triangle FED}=\frac{BF}{FD},$$

即
$$\frac{1-x}{x}=\frac{1}{1-x},$$

解出
$$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

因为 $x<1$，从而 $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

于是求得五边形 $ABCDE$ 的面积等于
$$3+(1-x)=\frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

容易看出符合条件的五边形有无穷多个，例如，先任意作出一个面积为 1 的三角形 ABE，可得到平行四边形 $ABFE$，在此基础上就可以建立符合条件的五边形.

例3 如图 7-3，三边长为 a，b，c 的三角形 ABC 内切一圆，作三条分别平行于三角形三边的切线，从三角形 ABC 上截得三个新的小三角形，求这四个三角形的内切圆的面积之和.

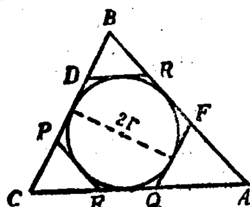


图 7 3

解 设 $p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$，用两种方法计算$\triangle ABC$，得到
$$r=\frac{\triangle ABC}{p}=\frac{ah_a}{2p}.$$

过 A 作 BC 的垂线，这样不难利用 $QF\parallel BC$ 以及相似三角形的性质算出$\triangle AQF$的内切圆半径与$\triangle ABC$ 内切圆半径之比为
$$\frac{r_A}{r}=\frac{h_a-2r}{h_a}=1-\frac{a}{p}.$$

由对称性便得到
$$\frac{r_B}{r}=1-\frac{b}{p},\quad \frac{r_C}{r}=1-\frac{c}{p}.$$

于是所求四圆面积和为

$$\pi(r^2+r_A{}^2+r_B{}^2+r_C{}^2)$$
$$=\pi\left[1+\left(1-\frac{a}{p}\right)^2+\left(1-\frac{b}{p}\right)^2+\left(1-\frac{c}{p}\right)^2\right]r^2$$
$$=\frac{\pi}{p^2}(a^2+b^2+c^2)\cdot r^2=\frac{\pi}{p^2}(a^2+b^2+c^2)\cdot\frac{(\triangle ABC)^2}{p^2}$$
$$=\frac{\pi}{p^3}(p-a)(p-b)(p-c)(a^2+b^2+c^2).$$

最后一步用了面积的另一种计算公式即公式(5).

注 解答中一个重要的手法是，用两种或两种以上的方法计算同一个量，这种想法在许多场合下都能够引导出证明．例4的解法也基于这个原则．读者还可以参看例7及例9中的解法．

例4 在平行四边形的每个边上依次取点，如果以所取这四个点为顶点的四边形的面积等于平行四边形面积的一半，证明：四边形至少有一条对角线平行于平行四边形的边．

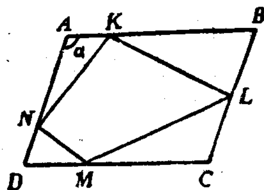


图 7-4

证 如图7-4所示，设$\angle DAB=\alpha$，$AD=a$，$AB=b$，则四边形$KLMN$的面积等于四边形$ABCD$的面积减去三角形AKN，BKL，CLM，DMN的面积之和．由面积公式不难求得

$$\triangle AKN=\frac{1}{2}AN\cdot AK\cdot\sin\alpha,$$
$$\triangle BLK=\frac{1}{2}\cdot BL\cdot(b-AK)\sin\alpha,$$
$$\triangle CLM=\frac{1}{2}(a-BL)\cdot(b-MD)\sin\alpha,$$
$$\triangle DMN=\frac{1}{2}(a-AN)\cdot MD\sin\alpha,$$

四边形$ABCD$的面积$=ab\sin\alpha$，

所以四边形 $KLMN$ 的面积等于

$$\frac{1}{2}ab\cdot\left[1-\frac{(AN-BL)(AK-MD)}{ad}\right]\sin\alpha.$$

另一方面，四边形 $KLMN$ 的面积又等于 $\frac{1}{2}ab\sin\alpha$

比较面积的两种计算结果，可见

$$(AN-BL)\cdot(AK-MD)=0.$$

于是，或者 $AN=BL$，从而 $LN\parallel AB$；或者 $KA=MD$，从而 $KM\parallel AD$.

二、面积方法

所谓面积方法，就是在处理一些几何问题时，以考虑面积作为论证(或者计算)的出发点．用面积证题的基本点在于用不同的方法计算同一块面积，列出等式，从而得到所考虑的量之间的关系．我们举例说明面积方法的大意．

例 5 如图 7-5，已知 P 是三角形 ABC 内部一点，AP, BP, CP 的延长线分别交 BC，AC，AB 于 A'，B'，C'，图示中的 a，b，c，d 为各线段的长．并且 $a+b+c=43$，$d=3$．求 abc.

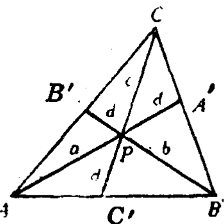


图 7-5

解 我们注意(无论 P 在内部的哪个位置)有面积等式

$$\triangle ABC=\triangle PAB+\triangle PAC+\triangle PBC,$$

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle ABC}+\frac{\triangle PBC}{\triangle ABC}+\frac{\triangle PAC}{\triangle ABC}=1.(1)$$

另一方面，$\triangle PAB$ 和 $\triangle ABC$ 同底，因此有

$$\frac{\triangle PAB}{\triangle ABC}=\frac{PC'}{CC'}=\frac{d}{d+c},$$

同理 $$\frac{\triangle PBC}{\triangle ABC}=\frac{d}{a+d},\quad \frac{\triangle PAC}{\triangle ABC}=\frac{d}{b+d}.$$

代入(1)式，并去分母整理得到

$$2d^3+(a+b+c)d^2-abc=0.$$

故 $abc=441$.

例6 如图 7-6，设正六边形 $ABCDEF$ 的对角线AC, CE 分别被内点 M, N 分成比为

$$\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=r.$$

如果 B, M, N 三点共线，求 r.

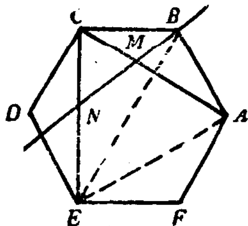


图 7-6

解 注意有面积等式

$$\triangle BCN=\triangle BCM+\triangle MCN \quad (1)$$

下面的任务是用 r 把这三个面积表示出来，便得到关于 r 的方程. 如果记 $\triangle ABC=s$，则不难算出 $\triangle ACE=3s$，$\triangle BCE=2s$.

由于 $\triangle BCM$ 和 $\triangle ABC$ 有公共边 BC，这样易见

$$\frac{\triangle BCM}{\triangle ABC}=\frac{CM}{AC}=\frac{AC-AM}{AC}=1-r.$$

即
$$\triangle BCM=(1-r)\cdot s.$$

同理
$$\triangle MCN=r(1-r)\cdot\triangle ACE=3r(1-r)s.$$

$$\triangle BCN=r\cdot\triangle BCE=2rs.$$

代入上面的(1)式，得

$$2r=r(1-r)+3r(1-r),$$

$r>0$，所以 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

读者应注意下面的例子和例 3 及例 4 在论证想法上的类似之处.

例7 如果三角形的三边长形成等差数列，证明，它的内切圆的半径等于它的某条高线长的三分之一

证 证三角形 ABC 的三边长分别为 a, b, c，不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$，这样$b=\frac{a+c}{2}$

一方面，由三角形面积公式(3)，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}r\cdot(a+b+c)=\frac{3}{2}rb.$$

其中 r 是内切圆半径. 另一方面，按面积公式(1)可知

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}h_b\cdot b.$$

我们用两种方法计算了同一个量——$\triangle ABC$. 比较这两个结果，即有$r=\frac{1}{3}h_b$.

例 8 如图 7-7，已知点 G 是三角形 ABC 的重心，过 G 点作直线分别交三角形的边 AB，AC 于 E，F. 证明：$EG\leqslant 2GF$.

证 连结 BG，CG 并延长，分别交 AC，AB 于 M，N.

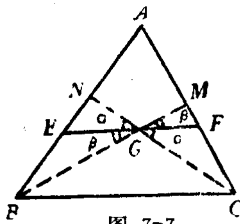


图 7-7

注意面积等式

$$\triangle BGN=\triangle EGN+\triangle BGE,$$

我们得到 $$NG\cdot BG\cdot\sin(\alpha+\beta)$$
$$=NG\cdot EG\cdot\sin\alpha+EG\cdot BG\cdot\sin\beta.$$

从而 $$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{EG}=\frac{\sin\alpha}{BG}+\frac{\sin\beta}{NG},\qquad(1)$$

同理得出 $$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{FG}=\frac{\sin\alpha}{MG}+\frac{\sin\beta}{CG}.\qquad(2)$$

两式相比有 $$\frac{EG}{FG}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{MG}+\dfrac{\sin\beta}{CG}}{\dfrac{\sin\alpha}{BG}+\dfrac{\sin\beta}{NG}}.$$

把 $BG=2GM$，$CG=2GN$ 代入上式，不难证出$\frac{EG}{FG}\leqslant 2$.

下面的问题也是美国数学竞赛的一道题，它看上去并不那么容易，我们介绍的解法再一次显示了面积方法的威力.

例 9 在$\angle A$ 内有一定点P，过P作直线交$\angle A$的两边于B，

C，问 $\frac{1}{PA}+\frac{1}{PC}$ 何时取得最大值？

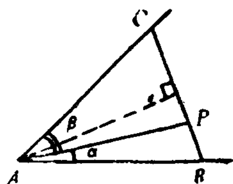


图 7-8

解 如图 7-8，设$\angle PAB=\alpha$，$\angle PAC=\beta$，α，β 都是定值．

注意无论过P 点直线的位置怎样，总有面积等式

$$\triangle APC+\triangle APB=\triangle ABC.$$

即
$$h\cdot PC+h\cdot PB=AB\cdot AC\cdot\sin(\alpha+\beta),$$

这里 h 是三角形 ABC 中 BC 边上的高．

此即
$$\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}=\frac{1}{h}\cdot\frac{AB\cdot AC}{PB\cdot PC}\sin(\alpha+\beta).\tag{1}$$

为了在(1)式右端消去 PB，PC，我们用两种方法计算$\triangle APB$ 及$\triangle APC$，有

$$PB\cdot h=AP\cdot AB\cdot\sin\alpha,\quad PC\cdot h=AP\cdot AC\cdot\sin\beta,$$

代入(1)，得

$$\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}=\frac{h\sin(\alpha+\beta)}{AP^2\sin\alpha\cdot\sin\beta}\leqslant\frac{1}{AP}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

并且显然当 $BC\perp AP$ 时，上式取得等号，即此时 $\frac{1}{PB}+\frac{1}{PC}$ 有最大值．

习 题 7

1. 凸四边形的对角线交于 P 点，同时三角形 ABP 与 CDP 面积之和等于三角形BCP 与ADP 面积之和，证明：点P是一条对角线的中点．
2. 证明：平分三角形面积和周长的直线通过三角形内切圆的圆心．
3. 设 P 是正三角形内任意一点，则 P 到三边距离之和是定值．
4. 设有三角形 $P_1P_2P_3$ 以及三角形内任意一点 P，直线 P_1P，P_2P，P_3P 交三角形的对边依次为 Q_1，Q_2，Q_3．证明：在比值
$$\frac{P_1P}{PQ_1},\ \frac{P_2P}{PQ_2},\ \frac{P_3P}{PQ_3}$$
中，至少有一个不大于 2，也至少有一个不小于 2．

第8讲　平移和旋转

杜 锡 录

在几何中，平移和旋转是两种比较特殊的平面变换，在考虑某些几何问题时，它们是很基本的辅助工具.

一、平移

所谓平移的意思是说：把平面上任意一点 X 变换到 X' 并使得 XX' 有确定的方向，以及线段 XX' 具有给定的长度. 这是一种平面到自身的变换. 平移在几何证题中有不少作用，其基本点是把某一图形平移到另一位置. 对证明线段相等、平行，两角相等经常有帮助.

例 1　设 P 是平行四边形 $ABCD$ 内一点，使得 $\angle PAB=\angle PCB$，证明：$\angle PBA=\angle PDA$.

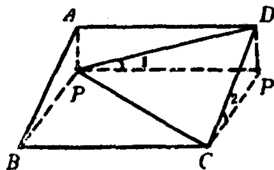


图 8-1

证　如图8-1，把 AP 平移至 DP'，则 $\angle BAP=\angle CDP'$，及 $\angle PBA=\angle P'CD$，$PP'\parallel BC$，推出 $\angle P'PC=\angle BCP$. 再由已知 $\angle PAB=\angle PCB$. 可知 $\angle P'PC=\angle CDP'$，从而 P，D，P'，C 四点共圆. 于是 $\angle 1=\angle 2$，又 $\angle 1=\angle PDA$，这就得到 $\angle PBA=\angle PDA$.

例 1 是常规的几何题. 在数学竞赛中还经常出现一些非常规的几何问题，一般来说，这种问题在解法上都依赖于“正常”的论证原则，只是技巧性比较高，不见得人人都能想到. 在考虑某些非常规几何题即所谓几何杂题时，平移也是用得上的一着.

例 2　在矩形 $ABCD$ 中有任意一点 M. 证明：存在一个凸四边形，它的对角线互相垂直且长度分别等于 AB 和 BC，而其

边长分别为 AM, BM, CM, DM.

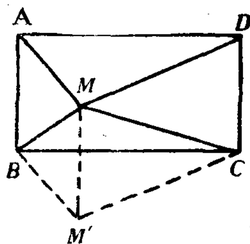


图 8-2

证 这是一个"存在性"命题，我们的论证是"构造性"的，即作出符合要求的四边形. 利用平移，在原图形上作业即可达到目的.

把 AM 平移到 BM'（如图8-2），则 $AMM'B$ 是平行四边形. $AB=MM'$, $AM=BM'$, $MM'\perp BC$. 又显然MM'平行且等于 DC, 从而 $DM=M'C$, $MC=M'C$, 这样四边形 $BMCM'$显然已满足要求，它当然是凸的.

例3 1988 条直线两两相交，证明所得的交角中至少有一个角不大于$\frac{\pi}{1987}$.

证 用平移的方法可把问题集中到一点来考虑，在平面上任取一点 P, 把 1988 条直线平移至经过 P 点，成为相交于 P点的新的 1988 条直线，注意直线间的交角都和原来（即平移之前）的交角相等. 这时，1988 条直线把以 P 为中心的圆周角分成 2×1988 个彼此相邻的角，设为 α_1, …, α_{3976}, 我们只要证明这些角中必有一个不大于$\frac{\pi}{1987}$, 否则的话，将有

$$2\pi=\alpha_1+\cdots+\alpha_{3976}$$

$$>3976\times\frac{\pi}{1987}>2\times 1987\times\frac{\pi}{1987}=2\pi. \text{ 矛盾.}$$

例4 在边长为 1 的正方形内放置一个图形，它任何两点的距离不等于 0.1, 证明这图形的面积小于 0.4.

证 如图 8-3. 考虑两个方向 $\overrightarrow{AA_1}$及$\overrightarrow{AA_2}$, 其中 A_1在 AD 边上，A_2在$\angle BAD$ 内，使得 $\angle A_1AA_2=60°$, 以及 $AA_1=AA_2=0.1$, 从而$A_1A_2=0.1$. 把正方形内的那个图形分别沿 $\overrightarrow{AA_1}$ 及

$\overrightarrow{AA_2}$ 平移 0.1 个单位，得到两个新的图形．注意由于图形上没有两点距离等于 0.1，故三个图形决不会有公共点，即互不相交．又它们位于边长为 1.1 的正方形内．所以，所说图形面积的三倍小于 1.1^2，即它的面积小于 $\frac{1}{3}\times 1.21<0.4$．

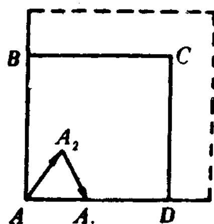


图 8-3

二、旋转

旋转也是一种几何变换，我们不必给出它的严格定义，只介绍一下旋转的概念．如果平面上一个变换使得定点 P 不动，任何其他点 X 变成点 X'，且满足 $PX=PX'$，$\angle XPX'=\theta(0°\leqslant\theta\leqslant 180°)$，以及从射线 PX 到 PX' 的方向与已给旋转方向相同．这样的变换称为绕中心 P（或者关于点 P）按已知方向旋转角度 θ 的旋转．旋转常能把某些"分散"的量"集中"起来，是解题中的一种有效手法．

例 5 设 P 是等边三角形 ABC 内的一点，$PC=3$，$PA=4$，$PB=5$．试求此等边三角形的边长．

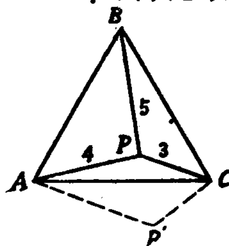


图 8-4

解 如图 8-4，绕 C 点把三角形 CBP 逆时针旋转 60°，这样 B 到达 A 的位置，P 点到达 P' 点．则易见 $\angle PCP'=60°$，$P'C=3$，$AP'=5$．在三角形 APP' 中，$AP^2+P'P^2=3^2+4^2=5^2=AP'^2$，所以 $\angle APP'$ 是直角．故 $\angle APC=\angle APP'+\angle P'PC=90°+60°=150°$．对三角形 APC 用余弦定理，

$$AC^2=AP^2+PC^2-2AP\cdot PC\cdot\cos 150°$$

$$=3^2+4^2+2\times 12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=25+12\sqrt{3},$$

所以正三角形边长是 $\sqrt{25+12\sqrt{3}}$．

读者应当看出了旋转的功效．在实际解题中绕哪个点，

旋转多少度（以及按怎样的方向）都得依问题而定，无程序可循．本题的旋转方式并不唯一，一般的问题也如此．我们特别提醒一下读者，这里选择的例题当然都和旋转有关，但决非每个问题都能这样处理．

例 6 两个正方形 $BCDA$ 和 $BKMN$ 有公共顶点 B（顶点按顺时针排列）．证明：三角形 ABK 的中线和三角形 CBN 的高位于同一直线上．

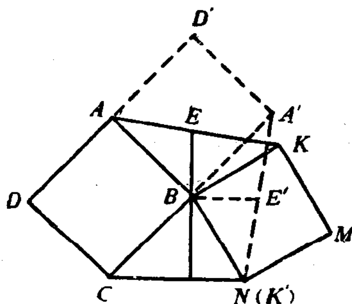


图 8-5

证 本题有多种解法，用旋转来论证可以看清问题的实质．

如图 8-5，作中心为 B 的（顺时针）90° 的旋转，这样把正方形的顶点 K 变为顶点 N 的位置，而顶点 C 变到 A 的位置，点 E（AK 的中点）变成 E'，且 $\angle EBE' = 90°$，E' 是 $A'K'$ 即 $A'N$ 的中点，又明显 B 是 $A'C$ 的中点，因此在三角形 $A'NC$ 中，$BE' \parallel CN$．但从 $\angle EBE' = 90°$ 可知，$EB \perp CN$．

下例提供了用旋转来实现构造解答的范例，请与例 2 比较．

例 7 设正三角形 ABC 内接于半径为 r_1 的圆，圆心为 O，圆外一点 P，$PO = r_2(r_2 > r_1)$，试证明三线段 PA, PB, PC 构成三角形，并计算其面积．

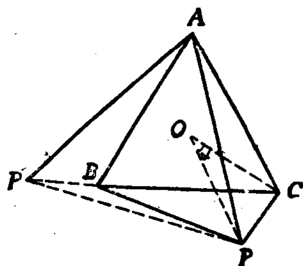


图 8-6

证 我们直接构造出所要的三角形．如图 8-6．把 $\triangle ACP$ 绕 A 点（顺时针）转60°，得 $\triangle ABP'$，则 $AP' = AP, BP' = PC, \angle ACP = \angle ABP'$，$\triangle APP'$ 是等边三角形，$PP' = PA$．

因为 P, C, A, B 四点不共

圆，所以$\angle ABP+\angle ABP'=\angle ABP+\angle ACP\neq 180°$，即$P'$，$B$，$P$不共线．所以$BP'$，$BP$，$PP'$能构成三角形(不会蜕化成线段)，从而$PA$，$PB$，$PC$能构成三角形．

为了计算三角形PBP'的面积，设$\angle POC=\alpha$，则

$$\begin{aligned}
&\triangle PBP'=\triangle APP'-\triangle ABP'-\triangle ABP\\
&=\triangle APP'-\triangle ABP-\triangle ACP=\triangle APP'-\triangle ABC-\triangle BPC\\
&=\frac{\sqrt{3}}{4}PA^2-\triangle ABC-\triangle OBP-\triangle OCP+\triangle BOC\\
&=\frac{\sqrt{3}}{4}[r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(120°+\alpha)]-\frac{3\sqrt{3}}{4}r_1^2\\
&\quad-\frac{1}{2}r_1r_2\sin(120°-\alpha)-\frac{1}{2}r_1r_2\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}r_1^2,
\end{aligned}$$

可计算得结果为$\frac{\sqrt{3}}{4}(r_2^2-r_1^2)$．

有一种非常特殊的旋转值得强调，就是绕定点P转180°的旋转．这种旋转也称为关于点P的中心对称．注意如果一个图形在关于P的对称之下变为自身，则说这图形以P为对称中心．例如，圆、平行四边形都是中心对称的图形，对称中心分别是圆心和平行四边形对角线的交点．

例8 在三角形ABC中，引出中线AF和CE，如果$\angle BAF=\angle BCE=30°$，证明：三角形$ABC$是正三角形．

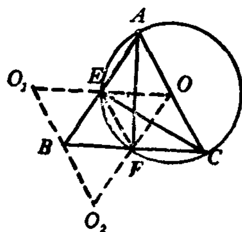


图 8-7

证 因为$\angle EAF=\angle ECF=30°$，所以$A,E,F,C$四点共圆．设此圆的圆心为$O$，则$\angle EOF=60°$．我们来证明$O$位于$AC$上．如图8-7，作$O$关于$E$点的对称点，设为$O_1$，则明显地有$AO=O_1B$(等于圆半径)，且$OO_1$的长等于圆的直径．

作出O关于F点的对称点O_2，同样有$CO=O_2B$(等于圆半径)．

OO_2 也等于圆直径.

在三角形 O_1OO_2 中，$O_1O=OO_2$，$\angle O_1OO_2=\angle EOF=60°$，故它是正三角形. 于是 O_1O_2 等于圆直径. 但 O_1B+O_2B 也等于直径，从而 B 在 O_1O_2 上，即 O_1，B，O_2 三点共线.

注意 A 关于 E 的对称点是 B，所以 $AO /\!/ O_1B$，即 $AO /\!/ O_1O_2$，同样 $CO /\!/ O_1O_2$，所以 O 在 AC 上. 这样三角形 EOF 是正三角形，便容易推知三角形 ABC 也是正三角形.

我们已谈到了中心对称，下面顺便介绍一下轴对称.

轴对称也是一种几何变换，其大意是说，给定直线 l，把平面上的点 X 变成 X'，使 l 为线段 XX' 的中垂线，这样的变换叫做关于直线 l 的对称. 上面说的 X' 称为 X 关于 l 的对称点，如果 X 在 l 上，则它关于 l 的对称点就是自身.

如果两个图形 F 与 F' 的所有点都是关于 l 的对称点，则 F 与 F' 叫做轴对称图形，l 称为这两个图形的对称轴. 例如，两个外切的等圆是轴对称图形，对称轴为它们的内公切线. 一个图形本身关于某直线对称是值得注意的，例如圆、正三角形都是自身对称的图形，对称轴分别是圆的(任一条)直径所在的直线，及正三角形的高所在的直线.

在解题中，轴对称往往比中心对称更为有用

例 9 证明：任意凸四边形的面积不大于对边乘积之和的一半.

证 如图 8-8 所示的凸四边形 $ABCD$，我们证明它的面积不超过 $\frac{1}{2}(AB\cdot CD+BC\cdot AD)$.

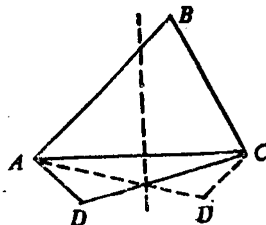


图 8-8

作出 D 关于线段 AC 中垂线的对称点 D'，则 $\triangle ADC\cong\triangle CD'A$，

从而　　四边形$ABCD$的面积

　　　　$=$四边形 $ABCD'$ 的面积

$$=\triangle BAD'+\triangle BD'C\leqslant\frac{1}{2}AB\cdot AD'+\frac{1}{2}BC\cdot CD$$

$$=\frac{1}{2}(AB\cdot CD+BC\cdot AD).$$

例 10 证明：在边长为 a,b,c 的任意三角形中，高 h_a 不大于 $\sqrt{p(p-a)}$，$p=\frac{a+b+c}{2}$.

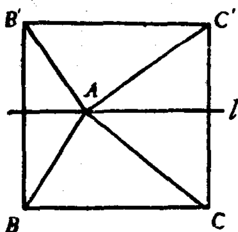


图 8-9

证 如图 8-9，过 A 点作边 BC 的平行线，作出 B,C 关于 l 的对称点 B' 及 C'. 这时，$b+c=AC+AB=CA+AB'\geqslant CB'=\sqrt{CB^2+B'B^2}$，即

$$b+c\geqslant\sqrt{a^2+(2h_a)^2},$$

从而 $h_a^2\leqslant\frac{1}{4}[(b+c)^2-a^2]=p(p-a)$.

此题的解法值得注意，它完全基于几何的想法. 我们也可以用代数不等式给出证明如下：

用两种方法计算三角形的面积可知，要证的不等式等价于

$$\sqrt{(p-b)(p-c)}\leqslant 2a,$$

但由算术-几何平均不等式，这是显然的. 并且当且仅当 $b=c$ 时，取得等号，从上面的几何证法也能看出这一点.

习 题 8

1. 设 $ABCDEF$ 是正六边形，K 是对角线 BD 的中点，M 是边 EF 的中点. 证明：三角形 AMK 是正三角形.
2. 在正方形 $ABCD$ 的边 BC 和 CD 上分别取点 M 和 K，使 $\angle BAM=\angle MAK$. 证明：$BM+KD=AK$.
3. 证明：如果三角形的一条中线和角平分线重合，则这个三角形是等腰三角形.
4. 已知直线 l 同侧的两点 A，B，在 l 上求一点 P，使 $AP+PB$ 最小.

第9讲　立体几何解题中的作图

杜 锡 录

中学数学教学中的能力培养有三个主要方面：运算能力，逻辑思维能力，空间想象能力．对运算能力的培养，现行中学教材内容很多，已足够重视．而随着初中平面几何教学要求的降低，培养逻辑思维能力和空间想象能力的任务，在高中阶段就主要落在立体几何的身上，这不能不引起我们的足够重视．事实上，很多大学生入校后在学习高等数学时所发生的困难大多也在于此．

在这一讲中，我们先来谈谈关于立体几何中的图．

在解几何题时，对于图的作用有着不同的态度．有些人认为，对于一般问题并不需要作图．有的人认为，在推理过程中，图本身是充足的论据，甚至用“由图形看出”来代替必要的说明和论证．这两种极端的观点都是不正确的．

当然几何中最主要的是逻辑论证．任何图，甚至最准确的图（在立体几何中没有最准确的图），也不能代替逻辑证明，它只不过是对推理中的解释，展现在图中的任何几何事实，必须严格地论证，而不是靠图形得到的．但是，为了使证明的思路更加明了，我们常常求助于几何作图．有时，也可能只有图才能帮助解决问题，才能正确地反映条件中提到的构形的实质性的几何特点．

有人说：“几何学是由不正确的图形作出正确结论的艺术．”在立体几何中很难作出绝对正确的图形，而正确的结论又正是通过这些不完全正确的图形得到的．因此，我们对这些不那么正确的图形要有足够的重视．

在作图时，首先要确切地满足问题中的条件，但这时可能并

不反映这个几何构形的实质，有时甚至能得出矛盾的结果．这时，就要适当地修改图，把图形的基本特点反映出来，但这往往在推理过程中才能发现．一旦我们所作的图把这些基本特点都反映了出来，我们的问题就接近于解决了．

例1 在三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中，侧棱 SC 等于底边 AB 并与底面 ABC 成 $60°$ 的角，顶点 A, B, C 以及棱锥的侧棱中点都在半径为 1 的球上．证明该球的球心在棱 AB 上，并求棱锥的高．

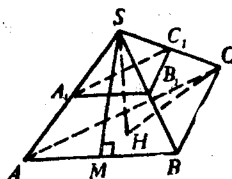


图 9-1

如图9-1，作棱锥 $S\text{-}ABC$，高 SH，连 HC．由已知$\angle SCH=60°$，在$\triangle CHS$中，$SH=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $HC=\frac{a}{2}$，这里 a 表示棱 SC 的长．又由已知，顶点 A, B, C 与相应的侧棱中点 A_1, B_1, C_1 在一个球面上，因此，有 A, A_1, B, B_1 四点共圆（棱锥侧面 SAB 为球的截面）．因为 $A_1B_1 \parallel AB$，则四边形 AA_1B_1B 是等腰梯形．从而

$$AA_1=BB_1=\frac{1}{2}SA=\frac{1}{2}SB.$$

对于四边形 BB_1C_1C，用同样的推理表明，棱锥$S\text{-}ABC$具有相等的侧棱：

$$SA=SB=SC=AB=a.$$

因此，$\triangle ASB$是等边的，也就是这个侧面的侧高等于$\frac{\sqrt{3}}{2}a$，即

$SM=SH$.

这样一来，棱锥的高与侧面ASB的侧高重合，即此时H与M两点重合，而ASB与ABC两平面互相垂直．因此，图 9-1是不正确的，不满足所给的已知条件，而应换成图9-2.

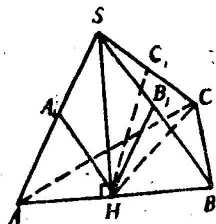


图 9-2

接着来解决我们的问题．由于$\angle SAH$

$=\angle SBH=\angle SCH=60°$，所以 $HA=HB=HC=\frac{a}{2}$.并且$HA_1=HB_1=HC_1=\frac{a}{2}$.所以，$H$ 是球心且在 AB 上，同时得$a=2$，及$SH=\sqrt{3}$。

立体几何问题常常归结为一个或几个平面几何问题，对每个这样的问题，最好都作出分图．球有时不好作出，但必须指出球的中心，球与直线、平面或与另外的球的切点．两个球相切的事实意味着：如果外切，它们中心间的距离等于半径之和；如果内切，它们中心间的距离等于半径之差．

例 2 球 O 内放有四个半径为 r 的球，这些球的每一个都与其他三个球及球 O 相切．试确定球 O 的半径．

解 如图 9-3，设四个半径为 r 的球的中心是 A,B,C,D，而外面大球的中心是 O，这四个小球两两外切，得到$ABCD$是棱长为 $2r$ 的正四面体．所有这四个小球与以 O 为中心的大球内切，所以有

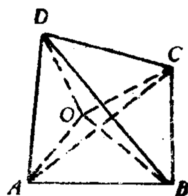


图 9 3

$$AO=BO=CO=DO=R-r,$$

其中 R 是所求的球 O 的半径．另一方面 $R-r$ 却是棱长为 $2r$ 的正四面体的外接球的半径，于是有 $R-r=\sqrt{\frac{3}{2}}r$，即

$$R=r\left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

有时把问题所提出的已知条件完全作在图上十分困难，而且一个十分复杂的图对解题毫无帮助．这时，就要想办法把图化简，在图 9-3 中，我们就没有把球都标出来，只是把球心之间的关系标了出来，也就简明地把问题解决了．有的情形用熟悉的某种几何体来标出问题中一些几何元素之间的关系，更能表现出问题的几何特征．

例3 三个相等的圆柱面两两相切，并且它们的轴互相垂直. 如果每个圆柱面的半径都等于 r，求与这三个圆柱面都相切的最小球的半径.

分析 如果我们把三个圆柱都画出来，那是很困难的. 但是，由问题的条件我们发现，三个轴两两互相垂直且都是异面直线，它们之间的距离都是 $2r$. 这种几何结构在立方体中却能体现出来. 因此，我们转而考察棱长为 $2r$ 的立方体，这就比较简单了.

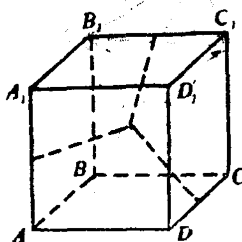


图 9-4

解 如图 9-4，作棱长为 $2r$ 的立方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$. AA_1 在一个圆柱的轴上，棱 DC 在另一个圆柱的轴上，棱 B_1C_1 在第三个圆柱的轴上.

我们先证明所求的球的中心与立方体的中心 O 重合.

事实上，我们考察通过点 O 与已知圆柱共心的三个圆柱，则 O 是位于这所有三个圆柱表面上或内部的唯一的点. 这就是说，异于 O 的任意点，到三条直线 AA_1，DC 和 B_1C_1 中的某一条的距离，比由 O 到这些直线的距离要大，就不会是切于这三个圆柱的球的球心.

这时我们算出点 O 到直线 AA_1 的距离为 $\sqrt{2}r$，所以，所求的球的半径为 $\sqrt{2}r-r$.

有的问题所提出的条件会允许出现多种几何结构，这时我们所作的图就不是一个而是多个，只能分别进行讨论.

例4 三棱锥的侧棱具有相同的长度 l，在棱锥顶点的两个面角为 α，第三个面角为 β，试求棱锥的体积.

解 令 $S\text{-}ABC$ 为已知棱锥. $SA=SB=SC$，$\angle ASB=\beta$，$\angle ASC=\angle BSC=\alpha$，则

$$\triangle ASC\cong\triangle BSC\Rightarrow AC=BC.$$

高 SO 的垂足 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心. 可能有三种情况：

(1) $\angle ACB<90°$——垂足位于$\triangle ABC$内；

(2) $\angle ACB=90°$——垂足是线段AB的中点；

(3) $\angle ACB>90°$——垂足在$\triangle ABC$的外部(分别如图9-5的(1)，(2)，(3))。

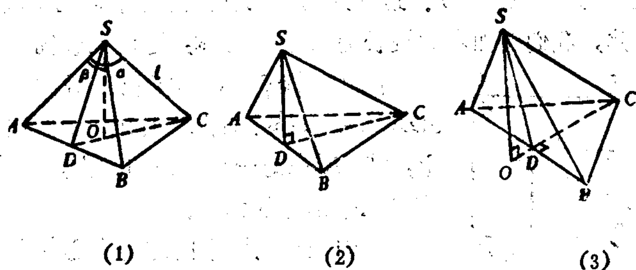


图 9 5

令D为线段AB的中点.

情形(1) 由已知条件，得

$$AB=2l\sin\frac{\beta}{2},\quad SD=l\cos\frac{\beta}{2},$$

$$AC=BC=2l\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$CD=\sqrt{4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-l^2\sin^2\frac{\beta}{2}}=l\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}.$$

令$OD=x$，在$\triangle SOD$中，$SO^2=l^2\cos^2\frac{\beta}{2}-x^2$，

在$\triangle CSO$中，$SO^2=l^2-(CD-x)^2$

$$=l^2-l^2+l^2\cos\alpha-l^2\cos^2\frac{\beta}{2}-x^2+2xl\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}},$$

$$x=l\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos\alpha}{\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}},$$

$$h=SO=\sqrt{l^2\cos^2\frac{\beta}{2}-l^2\frac{\left(\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos\alpha\right)^2}{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}}$$

$$=l\frac{\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\alpha}}{\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}},$$

所以 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}l^3\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\alpha}$.

（由$\angle ASB<\angle ASC+\angle BSC$，有$\beta<2\alpha$成立，且根号内的表达式是正的.）

情形(2) 存在这种情况，当且仅当$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$.

事实上，如果$\angle C=90°$，$CD=AD=l\sin\frac{\beta}{2}$；$CD=AC\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\sqrt{2}l\sin\frac{\alpha}{2}$. 反之，如果$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$，则

$$CD=l\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}=l\sqrt{2-2\cos\alpha-\sin^2\beta}$$

$$=\sqrt{2}l\sqrt{1-\cos\alpha-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{2}l\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\sqrt{2}l\sin\frac{\alpha}{2}.$$

因此，$\cos\angle ACD=\frac{CD}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

即 $\angle ACD=45°$，$\angle C=90°$.

这时， $h=SD=l\cos\frac{\beta}{2}$，$V=\frac{1}{6}l^3\sin\beta\sin\frac{\beta}{2}$.

情形(3) 令$x=OD$，如情形(1)，得

$$x = l\frac{\cos\alpha - \cos^2\frac{\beta}{2}}{\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}},$$

$$h = SO = l\frac{\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\alpha}}{\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}},$$

$$V = \frac{1}{3}l^3\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\alpha}.$$

这与情形(1)的解答一样，情形(2)的解答也能化为上式.

答案：$V = \frac{1}{3}l^3\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\alpha}$.

(但是，如果仅对情形(1)讨论，解答是不全面的.)

习 题 9

1. 直棱柱高的长度为 1，它的底面是边长为 2 及夹角为锐角 30° 的菱形，过底边作与底面成 60° 的截面，试求截面的面积.
2. 在半径等于 2 的球面上有三个半径为 1 的圆，圆心分别为 O_1, O_2, O_3，它们中的每一个都与另外两个相切，另有一个圆 O_4 的半径小于已知圆，并与三个已知圆在球面上相切，求这个圆的半径.
3. 三个相等且两两相切的圆柱面，它们的轴互相垂直，已知圆柱面的半径都等于 r，求这三个圆柱面之间的最大的圆柱面的半径.
4. 棱锥 S-ABC 的底面是三角形，其中 $AB=BC=20$，$AC=32$，每个侧面与底面之间的夹角为45°，试求棱锥的体积.

第10讲　三面角、四面体与三角形的类比

杜锡录

平面几何中最简单而又最重要的图形是三角形. 在立体几何中与之对应的最简单而又最重要的图形是三面角与四面体. 下面我们先用类比的方法来讨论有关三面角与四面体的性质.

一、三面角

1. 互补三面角

设给定三面角 $S\text{-}ABC$，从顶点 S 出发作三射线 SA_0，SB_0，SC_0 分别垂直于平面 SBC，SCA，SAB，射线 SA_0 与射线 SA，射线 SB_0 与射线 SB，射线 SC_0 与射线 SC 分别在平面 SBC，平面 SCA，平面 SAB 的同侧，那么三面角 $S\text{-}A_0B_0C_0$ 称为三面角 $S\text{-}ABC$ 的补三面角.（图 10-1.）

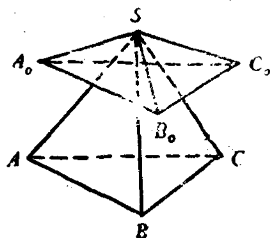


图 10 1

补三面角有下列性质：

（1）若 $S\text{-}A_0S_0C_0$ 是 $S\text{-}ABC$ 的补三面角，则 $S\text{-}ABC$ 也是 $S\text{-}A_0B_0C_0$ 的补三面角. 即它们是互补的.

（2）两个互补三面角中，一个的面角与另一个对应的二面角的平面角互补，即

$$\angle BSC + \angle B_0 - SA_0 - C_0 = \pi,$$

$$\angle ASC + \angle A_0 - SB_0 - C_0 = \pi,$$

$$\angle ASB + \angle A_0 - SC_0 - B_0 = \pi.$$

以上两性质的证明留给读者作为练习.

2. 三面角中的“三角形不等式”

三面角中的面角对应于三角形中的边，而二面角对应于三角形中的角，它们之间有一些相对应的结果，但不完全一致.

定理 1 三面角的任何一个面角小于其他两个面角之和而大于其他两个面角之差.

证 如果$\angle ASC \leqslant \angle ASB$，则不等式$\angle ASC < \angle ASB + \angle BSC$显然成立.

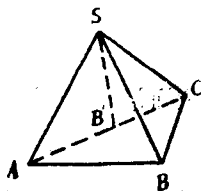


图 10-2

设$\angle ASC > \angle ASB$(图 10-2)，在ASC平面上，在$\angle ASC$的内部取$\angle ASB' = \angle ASB$，及$SB' = SB$，过B, B'点作平面交三面角的另二棱于A, C，则显然有

$$\triangle ASB \cong \triangle ASB'.$$

所以，$B'C = AC - AB' = AC - AB < BC$. 那么在三角形$BSC$和$B'SC$中，有两对应边相等，而第三边不相等，于是

$$\angle BSC > \angle B'SC = \angle ASC - \angle ASB,$$

或
$$\angle ASC < \angle BSC + \angle ASB.$$

定理 2 三面角的三个面角之和小于 2π.

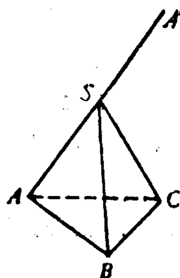


图 10 3

证 如图 10-3，延长一棱 SA 得SA'. 在三面角 $S\text{-}A'BC$ 中，有

$$\angle BSC < \angle CSA' + \angle A'SB = (\pi - \angle CSA) + (\pi - \angle ASB).$$

所以$\angle BSC + \angle CSA + \angle ASB < 2\pi$.

定理 3 三面角的三个二面角之和大于二直角.

证 以 $S\text{-}A_0B_0C_0$ 表示 $S\text{-}ABC$ 的补三面角，于是(由互补三面角的性质(2))有

$$\angle B_0SC_0 + \angle C_0SA + \angle A_0SB = (\pi - \angle B\text{-}SA\text{-}C) + (\pi - \angle C\text{-}SB\text{-}A) + (\pi - \angle A - SC - B) < 2\pi,$$

移项得 $\angle B\text{-}SA\text{-}C+\angle C\text{-}SB\text{-}A+\angle A\text{-}SC\text{-}B>\pi$.

3．三面角的面角与其二面角之间的关系

定理 4 三面角中，若两个面角相等，则它们所对的二面角也相等．

三面角中，若有两个面角相等，则称为等腰三面角．

定理 5 三面角中，若两个二面角相等，则它们所对的面角也相等．

这是定理 4 的逆定理．

推论 三面角中，若三个二面角相等，则三个面角也相等；若三个面角相等，则三个二面角也相等．

以上三个命题的证明留给读者作为练习．

定理 6 三面角中，若两个二面角不相等，则所对的面角也不等；大二面角所对的面角也较大．

定理 7 三面角中，若两个面角不相等，则所对的二面角也不等，大面角所对的二面角也较大．

定理 8 两个三面角中，若两个面角对应相等，而所夹二面角不等，则第三个面角也不等，大二面角所对的面角也较大．

定理 9 两个三面角中，若两个面角对应相等但第三个面角不等，则不等面角所对的二面角也不等；大面角所对的二面角也较大．

以上定理 6 和定理 7，定理 8 和定理 6 互为逆命题．它们的结论与三角形中边角的不等关系相似，它们的证明亦相似．只是定理 8 与定理 9 的证明要用到三面角相等的概念，限于篇幅不能论及了，读者也可只记结论而不用证明．而定理 6 和定理 7 的证明，请读者自行补出．

4．关于正弦定理与余弦定理

在三面角 $S\text{-}ABC$ 中，记二面角的平面角 $\angle C\text{-}SA\text{-}B=A$，$\angle A\text{-}SB\text{-}C=B$，$\angle A\text{-}SC\text{-}B=C$，$\angle BSC=\alpha$，$\angle CSA=\beta$，$\angle ASB$

$=\gamma$，则有

正弦定理：

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}. \tag{1}$$

第一余弦定理：

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A, \tag{2.1}$$

$$\cos\beta=\cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\cos B, \tag{2.2}$$

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos C. \tag{2.3}$$

第二余弦定理：

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos\alpha, \tag{3.1}$$

$$\cos B=-\cos A\cos C+\sin A\sin C\cos\beta, \tag{3.2}$$

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos\gamma. \tag{3.3}$$

正弦定理的证明：

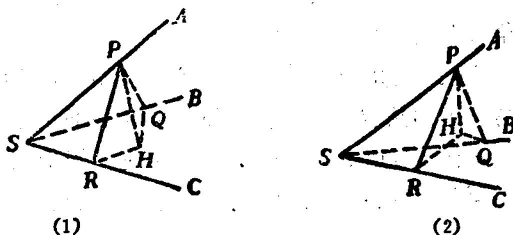


图 10 4

如图 10-4，我们在棱 SA 上取点 P，使 $|SP|=1$，设 Q, R, H 是 P 在直线 SB, SC 和平面 SBC 上的投影．在直角三角形 PQH 中，在顶点 Q 的角等于 $B\left(B\leqslant\frac{\pi}{2}\text{时，如图(1)}\right)$或者 $\pi-B$ $\left(B>\frac{\pi}{2}\right.$ 时，如图(2)$\Big)$．不论怎样，总有

$$PH=PQ\sin B=SP\cdot\sin\gamma\sin B=\sin\gamma\cdot\sin B,$$

在直角三角形 PRH 和 SPR 中同样可得

$$PH=\sin\beta\cdot\sin C,$$

于是 $$\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

同理可证另一等式

$$\frac{\sin\gamma}{\sin C}=\frac{\sin\alpha}{\sin A}.$$

所以， $$\frac{\sin\alpha}{\sin A}=\frac{\sin\beta}{\sin B}=\frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

第一余弦定理的证明：

如图 10-5，取 $SA=SB=SC=1$，作 AD 垂直于平面 SBC，垂足为 O，在平面 SBC 中，作 $DE\perp SB$, $DF\perp SC$, $FG\perp SB$，其中 E,F,G 分别为垂足，显然有

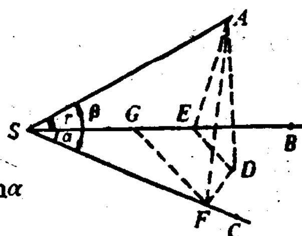


图 10-5

$$SE=\cos\gamma,\quad SE=SG+GE,$$

$$SG=SF\cos\alpha=SA\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha$$
$$=\cos\alpha\cos\beta,$$

$$GE=FD\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=FD\sin\alpha$$
$$=AF\cos C\sin\alpha$$
$$=SA\sin\beta\cos C\sin\alpha$$
$$=\sin\alpha\sin\beta\cos C,$$

所以 $$\cos\gamma=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos C. \tag{2.3}$$

同样可证另外两个等式.

第二余弦定理的证明：

作三面角 $S\text{-}ABC$ 的补三面角 $S\text{-}A_0B_0C_0$，则对三面角 $S\text{-}A_0B_0C_0$ 第一余弦定理成立，利用互补三面角的面角与二面角之间的关系有

$$\cos(\pi-A)=\cos(\pi-B)\cos(\pi-C)$$
$$+\sin(\pi-B)\sin(\pi-C)\cos(\pi-\alpha),$$

即 $$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos\alpha.$$

5. 三面角中的共线面

类似于三角形的三条高线相交于一点有下面的论断：

定理 10　证明：过三面角的棱且垂直于所对界面的三个平面具有公共的直线．(为确定起见，设两个面角$\angle ASB$和$\angle ASC$不是直角．)

证　通过在棱SA上取定的点A作垂直于这条棱的平面，设F和C是这个平面分别与直线SB和SC的交点，AA_1，BB_1，CC_1是问题条件中的平面与平面ABC的交线(如图10-6)．

平面SAA_1垂直于平面SBC和平面ABC，所以平面SAA_1垂直于平面SBC与平面ABC的交线，即直线BC．因此，$AA_1 \perp BC$，即AA_1是$\triangle ABC$的高线．

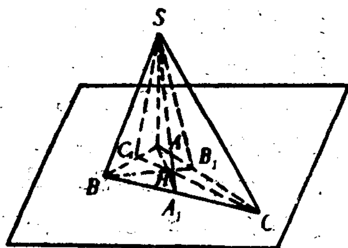


图 10-6

平面ASC垂直于平面ABC和平面SBB_1，所以平面ASC垂直于直线BB_1．因此，$BB_1 \perp AC$．类似可证$CC_1 \perp AB$．即BB_1和CC_1也是三角形ABC的高线．

三角形ABC的高线AA_1，BB_1和CC_1相交于一点H，所以，问题中所作的三个平面相交于一条直线——直线SH．

在这个定理的证明中，我们利用了平面几何中有关垂心的定理．类似于三角形中的"内心"，"重心"，"外心"，也有相应的定理，我们将放在习题中叙述，并请读者给出证明．

二、四面体

四面体是最简单的多面体，亦称为三棱锥．它也具有很多类似于三角形的性质，限于篇幅无法详述，下面仅举一例说明之．

定理 11　四面体的二面角的平分面分对棱所成的比等于形成这个二面角的两个界面的面积之比．

证　如图 10-7．设四面体的截面ADM是以AD为棱的二

面角的平分面．四面体 $ACMD$ 与 $ABMD$ 的体积分别用 V_1 和 V_2 表示．

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ADB}},$$

这是因为 M 到 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ADB$ 的距离相等．

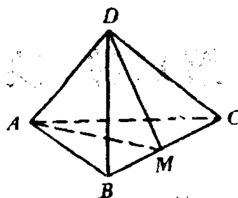


图 10-7

另一方面，容易看出

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_{\triangle DMC}}{S_{\triangle DMB}}=\frac{MC}{MB},$$

所以
$$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ADB}}=\frac{MC}{MB},$$

这正是需要证明的结论．

前面的关于余弦定理的证明，定理 10 和定理 11 的证明，体现了立体几何中三个重要的证明方法，这是要特别提到的．不要只看到证明很简单，还应善于总结方法．

余弦定理的证明，是用了“投影法”，就是把要讨论的一个几何元素，投影到某一个面上或某一条线上来集中讨论．

定理 10 的证明，是“化立几到平几”的方法，通常是把讨论的元素集中到一个平面上来进行，并有意识地利用平几定理．

定理 11 的证明，是所谓“面积法”，即分割多面体或旋转体，多角度、多层次地讨论其体积或面积公式，以求达到欲证明的目的．

习　题　10

1．证明补三面角的两个性质．

2．证明下面三个平面具有公共的直线：

（1）三面角的三个二面角的平分面．

（2）通过三面角的棱与所对面角的平分线所作的平面．

（3）垂直于三面角的界面并且通过分角线的平面．

3．证明：如果一个四面体的四个面的面积相等，则这四个面全等．

第11讲 映射与函数概念的应用

杜 锡 录

函数是数学中的一个重要的基本概念，在初等数学和高等数学中都占有重要的地位，例如在微积分中就要讨论函数的分析性质——连续性，可微性，可积性．因此，正确地、深入地理解函数的概念及其一些基本性质是完全必要的．

一、映射与函数的概念

1．映射

定义1 若f是集合A到集合B的一个单值对应，即对任何$a\in A$，按照对应法则f，有唯一的$b\in B$与之对应，则称这个对应f为A到B的一个映射，记作$b=f(a)$，或

$$f(A)=\{f(a)\,|\,a\in A\}，\text{或} f: A\longrightarrow B.$$

一般地$f(A)\subseteq B$．$a\in A$称为原象，$b\in B$称为象．

定义2 集合A到B的映射f如果使A中不同元素的象也不同，那么称f是A到B的1—1的映射（或称f是A到B的单射）．

显然，A到B的映射f是1—1的$\Longleftrightarrow$从$a_1\in A$，$a_2\in A$，$f(a_1)=f(a_2)$可推出$a_1=a_2$．

例1 设$f: R\longrightarrow R$

$$x\longrightarrow x^3.$$

因为从$x_1\in R, x_2\in R, x_1^3=x_2^3$可以推出$x_1=x_2$，所以$f$是$R$到$R$的1—1的映射．

例2 设$f: R\longrightarrow R$

$$x\longrightarrow x^2.$$

显然f不是R到R的1—1的映射，因为$f(-1)=f(1)=1$．

定义 3 设f是集合A到B的映射，如果B中每一个元素在f下都有原象，那么称f是A到B的映上的映射，简称为A到B上的映射（或称f是A到B的满射）.

不难看出，A到B的映射是映上的$\Longleftrightarrow$对于B中的任一元素b，在A中有元素a，使得$f(a)=b$.

显然，上述例 1 是映上的，例 2 不是映上的，因为负数b不存在原象a，使得$a^2=b$.

定义 4 集合A到B上的1—1映射称为A与B之间的一一对应（或称为A到B的双射）.

显然，例 1 是双射，例 2 不是双射.

双射（一一对应）又称为满单映射. 即有集合A到B的映射f是A与B之间的双射（一一对应）$\Longleftrightarrow A$中不同元素在f下的象不同，并且B中的每一个元素在f下都有原象.

定义 5 如果f是A与B之间的一一对应，那么可得B到A的一个映射g：任给$b\in B$，规定$g(b)=a$，其中a是b在f下的原象. 称这个映射g是f的逆映射，并把g记成f^{-1}.

显然有$(f^{-1})^{-1}=f$. 即

如果f是A与B之间的一一对应，则f^{-1}是B与A之间的一一对应，并且f^{-1}的逆映射是f.

证 由定义 5 知，f^{-1}是B到A的映射，对于B中的不同元素b_1和b_2，由于它们在f下的原象不同，所以b_1和b_2在f^{-1}下的象不同，所以f^{-1}是 1-1 的.

任给$a\in A$，设$f(a)=b$，则$f^{-1}(b)=a$. 这说明A中每个元素a在f^{-1}都有原象，因此，f^{-1}是映上的.

这样即得f^{-1}是B到A上的1—1映射，即f^{-1}是B与A之间的一一对应. 从而f^{-1}有逆映射$h: A\longrightarrow B$，由于任给$a\in A$，有$h(a)=b$，其中b是a在f^{-1}下的原象，即$f^{-1}(b)=a$，所以，$f(a)=b$，从而$h(a)=b=f(a)$，得$h=f$，这即是f^{-1}的逆映射是f.

例 1 中的 f 是 R 与 R 之间的一一对应，所以 f 有逆映射 $f^{-1}: R \longrightarrow R$, $x \longrightarrow \sqrt[3]{x}$.

2. 函数

函数是数集到数集的映射，中学阶段最普遍的是区间到区间的映射．设 f 是数集 A 到数集 B 的映射：$f: A \longrightarrow B$.

A 称为定义域，$B_1 = f(A) \subseteq B$ 称为 f 的值域．所以任何一个函数 f 总可以看成是它的定义域 A 到值域 B_1 上的函数，即 f 是映上的．

严格地讲，给出一个函数要连同它的定义域一并给出．例如：$f(x) = x^2$, $x \in (0,1)$；$f(x) = x^2$, $x \in R$.

这两个函数是不同的．因为它们的定义域不相同．

通常，只给出一个函数的对应规律，而要把它的定义域求出来．

定义 6 如果 f 是 A 到 B_1 上的1—1的函数，则 f 的逆映射 f^{-1} 称为函数 f 的反函数．

显然，当 f 是 A 到 B_1 上的1—1的函数时，f^{-1} 是 B_1 到 A 上的1—1的函数．因此，f^{-1} 的定义域是 f 的值域 B_1，f^{-1} 的值域是 f 的定义域 A，且 f^{-1} 的反函数是 f.

定义 7 设 $y = f(x)$ 是 A 到 B 的函数，而 $x = \varphi(t)$ 是 C 到 D 的函数，且 $D \subseteq A$，那么，$y = f(\varphi(t))$ 就是 C 到 B 的函数，称为复合函数．

定义 8 设 $y = f(x)$，令

$$f^{[2]}(x) = f(f(x)),$$
$$f^{[3]}(x) = f(f^{[2]}(x)),$$
$$\cdots\cdots$$
$$f^{[n+1]}(x) = f(f^{[n]}(x)),$$

其中 n 是正整数，则称 $f^{[n]}(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 次迭代．

这是一类特殊而又重要的复合函数．

8．函数的常见性质

函数的常见性质有单调性、对称性（奇偶性是特殊的对称性）、周期性、有界性等．

4．初等函数

下述六种函数为基本初等函数：

（1）常值函数　$y=c$．

（2）幂函数　$y=x^2$．

（3）指数函数　$x=a^x(a>0, a\neq 1)$．

（4）对数函数　$y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$．

（5）三角函数　$y=\sin x, y=\cos x, y=\operatorname{tg} x, y=\operatorname{ctg} x$．

（6）反三角函数 $y=\arcsin x$，　$y=\arccos x$，

$y=\operatorname{arctg} x$，　$y=\operatorname{arcctg} x$．

定义 9　六种基本初等函数经过有限次的算术运算（加、减、乘、除）以及有限次的复合所得到的函数统称为初等函数．

二、有关映射的一些例题

例 1　已知集合 $A=\left\{(x, y)\left|\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{y}{x}<\sqrt{3}\right.\right\}$ 和集合 $B=\left\{(x, y)\left|\frac{y}{x}>0\right.\right\}$．求一个$A$与$B$的一一对应$f$，并写出其逆映射

解　从已知集合 A，B 看出，它们分别是坐标平面上两直线所夹角形区域内的点的集合（如图11-1）．

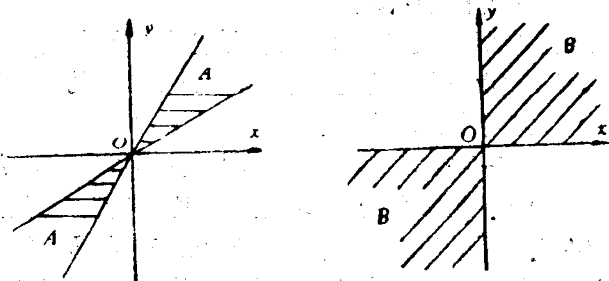


图 11-1

集合 A 为直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 和 $y=\sqrt{3}x$ 所夹角内点的集合．集合 B 则是第一、三象限内点的集合．所要求的对应实际上可使 A 区域拓展成 B 区域，并要没有“折叠”与“漏洞”．先用极坐标表示集合 A 和 B：

$$A=\left\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\mid\rho\neq0,\rho\in R,\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{3}\right\},$$

$$B=\left\{(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\mid\rho\neq0,\rho\in R,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right\}.$$

令 $f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta)\longrightarrow(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)$，$\varphi=3\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$．在这个映射下，极径 ρ 没有改变，极角之间是一次函数 $\varphi=3\theta-\frac{\pi}{2}$，因而 θ 和 φ 之间是一一对应，其中 $\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right)$，$\varphi\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$．所以，映射 f 是 A 与 B 的一一对应．

逆映射极易写出，从略．

如果 A，B 都是有限集合，它们的元素个数分别记为 $|A|$，$|B|$．对于映射 $f:A\to B$ 来说，如果 f 是单射，则有 $|A|\leqslant|B|$；如果 f 是满射，则有 $|A|\geqslant|B|$；如果 f 是双射，则有 $|A|=|B|$．这在计算集合 A 的元素的个数时，有着重要的应用．即当 $|A|$ 比较难求时，我们就找另一个集合 B，建立一一对应 $f:A\to B$，把 B 的个数数清，就有 $|A|=|B|$．

例 2 把 $\triangle ABC$ 的各边 n 等分，过各分点分别作各边的平行线，得到一些由三角形的边和这些平行线所组成的平行四边形，试计算这些平行四边形的个数．

解 如图 11-2 所示，我们由对称性，先考虑边不平行于 BC 的小平行四边形．把 AB 边和 AC 边各延长一等分，分别到 B'，C'，连 $B'C'$．将 AB' 的 n 条平行线分别延长，与 $B'C'$ 相交，连同 B'，C' 共有 $n+2$ 个分点，从 B' 至 C' 依次记为 1，2，…，

$n+2$. 图中所示的小平行四边形所在的四条线分别交 $B'C'$ 于 i,j,k,l. 记

$A=\{$边不平行于 BC 的小平行四边形$\}$,

$B=\{(i,\ j,\ k,\ l)\mid 1\leqslant i<j<k<l\leqslant n+2\}$.

把小平行四边形的四条边延长且交 $B'C'$ 边于四点的过程定义为一个映射：$f:A\to B$.

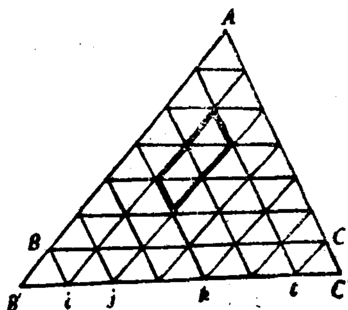


图 11-2

下面我们证明 f 是 A 与 B 的一一对应. 事实上，不同的小平行四边形至少有一条边不相同，那么交于 $B'C'$ 的四点亦不全同，所以，四点组(i,j,k,l)亦不相同，从而 f 是 A 到 B 的1—1的映射.

任给一个四点组(i,j,k,l)，$1\leqslant i<j<k<l\leqslant n+2$，过 i,j 点作 AB 的平行线，过 k,l 作 AC 的平行线，必交出一个边不平行于 BC 的小平行四边形，所以，映射 f 是A到B的满射.

总之 f 是 A 与 B 的一一对应，于是有 $|A|=|B|=C_{n+2}^4$.

加上边不平行于 AB 和 AC 的两类小平行四边形，得到所有平行四边形的总数是 $3C_{n+2}^4$.

例 3 在一个 6×6的棋盘上，已经摆好了一些1×2的骨牌，每一个骨牌都恰好覆盖两个相邻的格子 证明：如果还有 14 个格子没有被覆盖，则至少能再放进一个骨牌

分析 还有 14 个空格，说明已经摆好了 11 块骨牌. 如果已经摆好的骨牌是 12 块，图 11-3 所示的摆法就说明不能再放入骨牌. 所以，有 14 个空格这一条件是完全必要的. 我们要证明当还有 14 个空格时，能再放入一个骨牌，只要能证明必有两个相邻的空格就够了. 如果这种情况不发生，则每一个空格的四周都

有骨牌．由于正方形是对称的，当我们选定一个方向时，空格和骨牌就有了某种对应关系，即可建立空格到骨牌的一种映射，通过对空格集合与骨牌集合之间的数量关系，可以得到空格分布的一个很有趣的结论，从而也就证明了我们的命题．

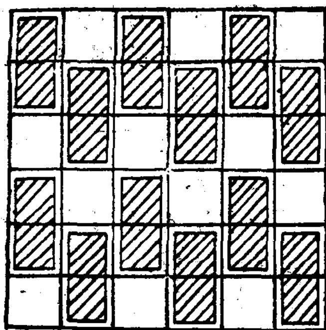


图 11-3

证 我们考虑下面 5×6 个方格中的空格，即除去第一行后的方格中的空格．对每一个这样的空格，考察它上方的与之相邻的方格中的情况：

(1) 如果上方的这个方格是空格，则问题得到解决．

(2) 如果上方的这个方格被骨牌所占，这又有三种情况：

(i) 骨牌是横放的，且与之相邻的下方的另一个方格也是空格，则这时有两空格相邻，即问题得到解决；

(ii) 骨牌是横放的，与之相邻的下方的另一个方格不是空格，即被骨牌所覆盖；

(iii) 骨牌是竖放的．

现在假设仅发生(2)中的(ii)和(iii)时，我们记 X 为下面 5×6 个方格中的空格集合，Y 为上面 5×6 个方格中的骨牌集合，作映射 $\varphi: X\to Y$，由于每个空格(X 中的)上方都有骨牌(Y 中的)，且不同的空格对应于不同的骨牌，所以，这个映射是单射，于是有 $|X|\leqslant|Y|$．

如果棋盘第一行(即最上方的一行)中的空格数多于 3 个时，则必有两空格相邻，这时问题就得到解决．

现设第一行中的空格数最多是 3 个，则有 $|X|\geqslant14-3=11$．另一方面全部的骨牌数为 11，即 $|Y|\leqslant11$．所以必有 $|X|=|Y|$，事实上这是一个一一映射．这时，将发生一个很有趣的现象：最

下面一行全是空格，当然可以放入一个骨牌

这个题目的证明是颇具特色的，从内容上讲，这个题目具有一定的综合性，既有覆盖与结构，又有计数与映射，尤其是利用映射来计数，在数学竞赛中还较少见.

当然这个题目也可以用其他的方法来解决，例如用抽屉原则以及用分组的方法来讨论其中两行的结构，也能比较容易地解决这个问题，请读者作为练习.

习 题 11

1. 讨论函数$y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$的单调性.

2. 讨论函数 $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$的有界性.

3. 已知$f^{[3]}(x)=8x+7$，且$f(x)$是一次函数，求$f(x)$.

4. 设全集为R(实数集)，$\varphi(x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x+1}{11}$，$f(x)=\sqrt{x}$. 试表述下列集合：(1) 函数$\varphi(x)$的定义域$A$；(2) 函数$f(x)$的定义域$B$；(3) 函数$y=f(\varphi(x))$的定义域$D$；(4) 方程$x^2-8x+7=0$的解集$E$；(5) 用$D,E,R$表示函数$y=\frac{f(\varphi(x))}{x^2-8x+7}$的定义域$G$，并经集合运算把它表述出来.

5. 在平面内给出一凸($n\geqslant6$)边形，它的任意三条对角线都不共点，求由n边形的边和所有对角线能围成的三角形的总数.

第12讲　函数迭代和函数方程

杜 锡 录

一、函数性质的一些应用

利用函数的对称性、周期性、有界性、单调性以及函数图象的一些特点来解决有关函数的问题，是一种重要的方法，应用十分广泛.

例 1　函数 f 定义在实数集上，且对一切实数 x 满足等式：$f(x+2)=f(2-x)$ 和 $f(7+x)=f(7-x)$. 设 $f(x)=0$ 的一个根是 $x=0$，记 $f(x)=0$ 在区间 $-1000\leqslant x\leqslant 1000$ 中根的个数为 N，求 N 的最小值.

解　因为对一切实数 x，$f(x)$ 满足：$f(2+x)=f(2-x)$，$f(7+x)=f(7-x)$，那么，$f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 和 $x=7$ 对称.由 $f(0)=0$ 得

$$f(4)=f(2+2)=f(2-2)=f(0)=0.$$

$$f(10)=f(7+3)=f(7-3)=f(4)=0.$$

即在 $(0,10]$ 上 $f(x)=0$ 至少有两个根.

其次，对一切 x 有

$$\begin{aligned}f(x+10)&=f(7+(x+3))=f(7-(x+3))=f(4-x)\\&=f(2+2-x)=f(2-(2-x))=f(x),\end{aligned}$$

这是一个以 10 为周期的周期函数，因此在每个周期上都至少有两个根　加上 $x=0$，即得 $f(x)=0$ 在区间 $-1000\leqslant x\leqslant 1000$ 上至少有 401 个根

这个题充分利用了函数的对称性及周期性，比较容易地估计出方程 $f(x)=0$ 的根的个数.

例 2　若 $x,y,z,a,b,c,r>0$，证明：

$$\frac{x+y+a+b}{x+y+a+b+c+r}+\frac{y+z+b+c}{y+z+a+b+c+r}$$
$$>\frac{x+y+a+c}{x+z+a+b+c+r}.$$

证 考虑函数 $y=\frac{x}{x+\alpha}=1-\frac{\alpha}{x+\alpha}(\alpha>0)$，在$(-\infty,-\alpha)$和$(-\alpha,+\infty)$上是单调增加的，它们的图象是以直线 $x=-\alpha$和$y=1$为渐近线的双曲线(如图12-1)。

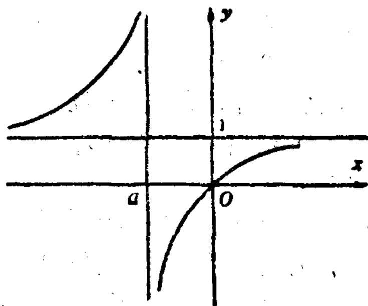


图 12 1

利用单调性有

$$\frac{x+y+a+b}{x+y+a+b+c+r}+\frac{y+z+b+c}{y+z+a+b+c+r}$$
$$>\frac{x+a+b}{x+a+b+c+r}+\frac{z+b+c}{z+a+b+c+r}$$
$$>\frac{x+a}{x+z+a+b+c+r}+\frac{z+c}{x+z+a+b+c+r}$$
$$=\frac{x+z+a+c}{x+z+a+b+c+r}.$$

这道题目是先造辅助函数 $f(x)=\frac{x}{x+\alpha}$，再利用其单调性来证明的。

二、关于函数迭代

函数迭代这一特殊的函数复合形式，在现代数学中占有一定

的地位，近年来在国内外的数学竞赛中也频频出现，同时它对加强函数概念的理解也是十分有益的.

例 3 设$P_1(x)=x^2-2, P_n(x)=P_1(P_{n-1}(x))$，这里$n=2,3,4,\cdots$，试证对任意自然数 n，方程 $P_n(x)=x$的根全是相异实根.

证 首先证明方程 $P_n(x)=x$ 的实根的绝对值不大于 2．为此只要证明命题：对$|x|>2$ 的一切实数 x，都有$P_n(x)>|x|$.

对 n 用数学归纳法．令$|x|=2+\alpha(\alpha>0)$

当 $n=1$ 时，$P_1(x)=x^2-2=(2+\alpha)^2-2=2+4\alpha+\alpha^2$

$$>2+\alpha=|x|.$$

设当 $n=k$ 时，$P_k(x)>|x|$成立，则设

$$P_n(x)=|x|+\beta\ (\beta>0).$$

于是当 $n=k+1$时，

$$P_{k+1}(x)=P_1(P_k(x))=P_k^2(x)-2=(|x|+\beta)^2-2$$
$$=|x|^2+2\beta|x|+\beta^2-2>|x|^2-2>|x|.$$

即当 $n=k+1$ 时，有 $P_{k+1}(x)>|x|$，即对所有$|x|>2$的 x 都不是方程 $P_n(x)=x$ 的根.

设方程 $P_n(x)=x$ 的根为 $x=2\cos t\ (0\leqslant t\leqslant\pi)$.

$$P_1(x)=(2\cos t)^2-2=2\cos 2t,$$
$$P_2(x)=(2\cos 2t)^2-2=2\cos 2^2t,$$
$$\cdots\cdots,$$
$$P_n(x)=2\cos 2^n t.$$

于是方程变为 $2\cos 2^n t=2\cos t$，解之得

$$t_i=\frac{2i\pi}{2^n-1},\qquad i=0,1,2,\cdots,2^{n-1}-1,$$

$$t_j=\frac{2j\pi}{2^n+1},\qquad j=1,2,\cdots,2^{n-1}.$$

故方程有2^n 个实根

$$x_{i,j}=2\cos\frac{2_i\pi}{2^n-1},\qquad i=0,1,2,\cdots,2^{n-1}-1,$$

$$x_{2,j}=2\cos\frac{2j\pi}{2^n+1},\qquad j=1,2,\cdots,2^{n-1}.$$

因为 $x_{1,0}>x_{1,1}>\cdots>x_{1,2^{n-1}-1}$, $x_{2,1}>x_{2,2}>\cdots>x_{2,2^{n-1}}$,所以各组中的根互不相同.

如果两组中有两根相同，设为

$$\frac{2i\pi}{2^n-1}=\frac{2j\pi}{2^n+1},$$

于是
$$j=\frac{2^n+1}{2^n-1}i=i+\frac{2i}{2^n-1}.$$

因为 j 是整数，必有 $2^n-1|i$，与 $i\leqslant 2^{n-1}-1$ 矛盾.

例 4 函数迭代的一个性质：如果存在函数 g,φ,f，使得 $f(x)=g^{-1}(\varphi(g(x)))$，或写成 $f=g^{-1}\varphi g$，则有

$$f^{[n]}=g^{-1}\varphi^{[n]}g,$$

即
$$f^{[n]}(x)=g^{-1}(\varphi^{[n]}(g(x))).$$

利用数学归纳法以及 $g^{-1}(g(x))=x=I(x)$ 即可证明，这留给读者练习.

例 5 设 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$, $x\in(1,+\infty)$,求 $f^{[n]}(x)$.

解法一 $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x-1)}=\dfrac{2}{-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{4}{x}}=\dfrac{2}{1-\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^2}$,

令 $g(x)=1-\dfrac{2}{x}$, $\varphi(x)=x^2$，有 $g^{-1}(x)=\dfrac{2}{1-x}$，并且

$$f(x)=g^{-1}(\varphi(g(x))).$$

于是由 $\varphi^{[n]}(x)=x^{2^n}$，得

$$f^{[n]}(x)=\frac{2}{1-\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{2^n}}.$$

解法二 （如果不知道例 2 的这个性质，可以利用普通的变量代换法得到同样的结果.）

由于 $$f(x)=\frac{x^2}{2(x-1)}=\frac{2}{1-\left(1-\frac{2}{x}\right)^2},$$

令 $1-\frac{2}{x}=\cos\beta$，则有 $f(x)=\frac{2}{1-\cos^2\beta}$.

$$f^{[2]}(x)=f(f(x))=\frac{\left(\frac{2}{1-\cos^2\beta}\right)^2}{2\left(\frac{2}{1-\cos^2\beta}-1\right)}$$

$$=\frac{2}{(1-\cos^2\beta)(1+\cos^2\beta)}=\frac{2}{1-\cos^4\beta}.$$

设 $$f^{[n]}(x)=\frac{2}{1-\cos^{2^n}\beta},$$

由于 $$f^{[n+1]}(x)=f(f^{[n]}(x))=\frac{\left(\frac{2}{1-\cos^{2^n}\beta}\right)^2}{2\left(\frac{2}{1-\cos^{2^n}\beta}-1\right)}$$

$$=\frac{2}{(1-\cos^{2^n}\beta)(1+\cos^{2^n}\beta)}=\frac{2}{1-\cos^{2^{n+1}}\beta},$$

所以，由数学归纳法即知，对所有自然数 n，

$$f^{[n]}(x)=\frac{2}{1-\cos^{2^n}\beta}=\frac{2}{1-\left(1-\frac{2}{x}\right)^{2^n}}.$$

在很多函数的运算当中，变量代换是一个行之有效的工具，需要掌握.

三、简单函数方程

不给出具体的函数形式，只给出函数的一些性质和一些关系式或函数方程，而要确定这个函数，或求出函数值，或证明这个函数所具有的其他性质，这类问题也是常见的关于函数的问题，多数需要对函数方程进行讨论. 这类问题比较难，下面举几例说明之.

例 6 已知函数 $f(x)$ 定义在正实数范围内，且满足关系式 $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)\lg x+1$，求 $f(x)$.

解 对任意的 $x>0$，由关系式有

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)\lg\frac{1}{x}+1=-f(x)\lg x+1,$$

所以，$$f(x)=\lg x(-f(x)\lg x+1)+1,$$

解之得 $$f(x)=\frac{1+\lg x}{1+\lg^2 x}.$$

例 7 设 $F(x)$ 是对除 $x=0$ 及 $x=1$ 以外的一切实数有定义的实值函数，且

$$F(x)+F\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x, \qquad (1)$$

求 $F(x)$.

解 令 $x=\frac{y-1}{y}$，$y\neq 0$，$y\neq 1$，代入(1)得

$$F\left(\frac{y-1}{y}\right)+F\left(\frac{1}{1-y}\right)=\frac{2y-1}{y}. \qquad (2)$$

令 $x=\frac{1}{1-z}$，$z\neq 0$，$z\neq 1$，代入(1)得

$$F\left(\frac{1}{1-z}\right)+F(z)=\frac{2-z}{1-z}. \qquad (3)$$

分别把(2)，(3)中的变量 y，z 换为 x，得

$$F\left(\frac{x-1}{x}\right)+F\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2x-1}{x}, \qquad (4)$$

$$F\left(\frac{1}{1-x}\right)+F(x)=\frac{2-x}{1-x}. \qquad (5)$$

从(1)，(4)和(5)中消去 $F\left(\frac{x-1}{x}\right)$，$F\left(\frac{1}{1-x}\right)$，得

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[(1+x)+\frac{2-x}{1-x}-\frac{2x-1}{x}\right]=\frac{1+x^2-x^3}{2x(1-x)}.$$

以上两个例题都是利用所给关系式，施用适当的变量代换和一定的运算技巧，把函数 $f(x)$确定下来.

例8 函数$f(n)$对所有的正整数有定义，取非负整数值，并且对所有的正整数 m，有

$$f(m+n)-f(m)-f(n)=0\text{或}1;$$

以及 $f(2)=0$，$f(3)>0$，$f(9999)=3333$. 求 $f(1982)$.

解 由 $0=f(2)\geqslant 2f(1)$，得 $f(1)=0$，由

$$f(3)-f(2)-f(1)=0\text{ 或 }1,$$

得

$$0\leqslant f(3)\leqslant 1,$$

由题设 $f(3)>0$，得 $f(3)=1$.

下面我们首先证明，对于 $k<3333$，有 $f(3k)=k$.

由于 $f(3k)\geqslant f(3(k-1))+f(3)=f(3(k-1))+1$,

用数学归纳法易得

$$f(3k)\geqslant k.$$

如果存在 $k_0, 1\leqslant k_0<3333$，使 $f(3k_0)\geqslant k_0+1$，则由

$$f(9999)\geqslant f(9999-3k_0)+f(3k_0)\geqslant 3333-k_0+k_0+1>3333,$$

与题设矛盾，所以必有 $f(3k_0)=k_0$.

于是显然有 $660\leqslant f(1982)\leqslant 661$.

如果 $f(1982)=661$，则由

$$f(9999)=f(5\times 1982+89)$$

$$\geqslant 5f(1982)+f(89)\geqslant 5\times 661+f(87)$$

$$\geqslant 3305+29>3333,$$

与题设矛盾，所以必有 $f(1982)=660$.

例9 设 $f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的增函数，且

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y).$$

求证: $f(x^n)=nf(x), (n\in N)$.

证 当 $x=y$ 时，$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)=0$，即 $f(1)=0$.

当 $n=1$ 时，$f(x)=f(x)-f(1)=f(x)$，命题成立.

假设当 $n=k$ 时，结论成立，即 $f(x^k)=kf(x)$.

当 $n=k+1$ 时，由

$$f(x^{k+1})=f\left(\frac{x^k}{\frac{1}{x}}\right)=f(x^k)-f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=kf(x)-[f(1)-f(x)]=(k+1)f(x),$$

即当 $n=k+1$ 时命题也成立.

由数学归纳法即知，$f(x^n)=nf(x)$对所有自然数都成立.

以上两例也是充分利用所给关系式，并施用一些运算技巧，或求函数值，或证函数性质.

习 题 12

1. 已知函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 的图象与它的反函数的图象完全重合，其中实数 a，b，c，d 满足关系$(a^2+c^2)(c^2+d^2)\neq 0$，那么函数应该具有怎样的形式?

2. 设 $f(n)$是定义在自然数集上且取自然数值的严格递增的函数，$f(2)=2$，当 m，n 互素时 $f(mn)=f(m)f(n)$.

   证明：对一切正整数 n，$f(n)=n$.

3. 函数 $f(x,y)$对所有的非负整数 x，y 满足：

   (1) $f(0,y)=y+1$；

   (2) $f(x+1,0)=f(x,1)$；

   (3) $f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$.

   试确定 $f(4,1981)$.

第13讲 证明不等式的常用方法与技巧(一)

严 镇 军

不等式在数学中占有重要地位，由于其本身的完美性及证明的困难性，使不等式成为中学范围内各种考试(特别是数学竞赛和高考)的热门试题.

证明不等式的途径是对原不等式作代数变形，而变形的依据则是不等式的基本性质. 这里把不等式的基本性质分类罗列如下(以后如不作特殊声明，各文字都是实数)：

1. 不等式的基本特征

$$a \geqslant b \Longleftrightarrow a-b \geqslant 0,$$

$$a < b \Longleftrightarrow a-b < 0.$$

这是不等式的定义，也是证明不等式的根本要义.

2. 对一个不等式进行变形的性质：

(1) $a>b \Longleftrightarrow b<a$(对称性).

(2) $a>b \Longleftrightarrow a+c>b+c$(加法保序性).

(3) $a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$；

$a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$(乘法保序性).

(4) $a>b$，且 a, b 同号 $\Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

(5) $a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n, \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\ (n \in N)$.

3. 对两个(或两个以上)不等式进行运算的性质：

(1) $a>b, b>c \Rightarrow a>c$(传递性).

(2) $a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$.

(3) $a>b, c<d \Rightarrow a-c>b-a$.

(4) $a>b>0, 0<c<d \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}, ad>bc$.

4．含绝对值的不等式的性质：

(1) $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow x^2 \leqslant a^2 \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.

$|x+b| \leqslant a \Longleftrightarrow -a-b \leqslant x \leqslant a-b$.

(2) $|x| \geqslant a$（设 $a>0$）$\Longleftrightarrow x^2 \geqslant a^2 \Longleftrightarrow x \geqslant a$ 或 $x \leqslant -a$.

(3) $||a|-|b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|$（三角不等式）.

(4) $|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leqslant |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$.

证明不等式没有固定的程序，证法因题而异，而且灵活多样，技巧性强，一个不等式的证法常不止一种，一种证法中也可能要用几种方法．最常用的方法大致有以下几种：

一、比较法

比较法通常有两种形式：

1．差值比较法：由定义，欲证 $a>b$，只需证 $a-b>0$。

2．商值比较法：由乘法保序性，若 $b>0$，欲证 $a>b$，只需证 $\frac{b}{a}<1$ 或 $\frac{a}{b}>1$.

例 1 设 $a, b, c \in R^+$，求证：

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

证 由于不等式关于 a, b, c 对称，不妨设 $a \geqslant b \geqslant c>0$，则 $a-b, b-c, a-c \in R^+$，且 $\frac{a}{b}$，$\frac{b}{c}$，$\frac{a}{c}$ 都 $\geqslant 1$.

所以 $\frac{a^a b^b c^c}{(abc)^{(a+b+c)/3}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}}\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}} \geqslant 1$.

注 (1) 本题的证法虽很简单，但其变形的技巧是很高的．

(2) 本题可作如下的推广：若 $a_i \in R^+(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} \geqslant (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}. \qquad (1)$$

其证明中的变形与前述完全相同.

(3) 本题的证明中，利用了不等式的对称性，增加了一个补充假设，从而给论证带来了很大的方便，这种技巧在证明对称不等式时常用. 所谓一个关于字母 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的不等式是对称的，其含义是：把任何两个字母 a_i 和 $a_j(i \neq j)$ 对调位置，都不改变这个不等式. 如(1)是对称不等式. 证明对称不等式时，由于各字母处于同等地位，可以把字母按一定顺序排列起来，例如可设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$.

例 2 设 $m, n \in N, m > n$，证明：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

证 由传递性可见，只要证明

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \qquad (2)$$

即可. 由二项式定理，并作变形，有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

同理 $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

现在不等式(2)是很显然的了，因为比较上面两式右端和式下的项，对每个 $k(k=0, 1, \cdots, n)$，有

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right).$$

而且后一式右端比前式右端还多一正项.

二、放缩法

有时不等式 $A\leqslant B$ 用比较法不易证明，可借助一个(或多个)中间量 C 作比较．具体地说，如果为某种方法能断定 $A\leqslant C$，就可以试着去证明 $C\leqslant B$．若能达此目的，则证得 $A\leqslant B$(传递性)．这是一种把 A 放大的方法，不过可能由于放大得太多，以致 $C\leqslant B$ 不成立，那就只有另行设法．当然也可以采用把 B 缩小的办法．我们统称为放缩法．放缩本身是一种变形技巧．

例 3 设 $0\leqslant a, b, c\leqslant 1$，求证：

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1.$$

证 显然，如果把左端直接通分会把问题弄得很复杂．由对称性，可设 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant 1$，于是，有

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}\leqslant\frac{a+b+c}{a+b+1}.$$

因而可以试着去证明比较简单的不等式

$$\frac{a+b+c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1. \tag{3}$$

因为左边 $=1-\dfrac{1-c}{a+b+1}[1-(1+a+b)(1-a)(1-b)]$，

再放大，又有

$$(1+a+b)(1-a)(1-b)\leqslant(1+a+b+ab)(1-a)(1-b)$$

$=(1-a^2)(1-b^2)\leqslant 1$，故不等式(3)成立，从而原式成立．

三、综合法

综合法是由题设条件出发，根据不等式的性质或其他已知不等式，推出要证的不等式．

例 4 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n\in R^+$，求证

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

(1984年全国高中数学联赛试题.)

证 由算术平均-几何平均不等式，有

$$\frac{x_1^2}{x_2}+x_2=\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_2}}\right)^2+(\sqrt{x_2})^2\geqslant 2\frac{x_1}{\sqrt{x_2}}\cdot\sqrt{x_2}=2x_1.$$

同理 $\frac{x_2^2}{x_3}+x_3\geqslant 2x_2,\cdots,\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+x_n\geqslant 2x_{n-1},$

$$\frac{x_n^2}{x_1}+x_1\geqslant 2x_n.$$

把以上 n 个不等式相加并化简，即得原不等式.

注 利用一些简单的不等式相加(或相乘)，推出一个比较复杂的不等式，这是一种证明不等式的常用技巧.

例 5 设 $n\geqslant 2$，求证

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

证 本题用数学归纳法证是很繁的，它可由一些简单不等式相加得出，因为

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}>\frac{1}{4},\ \frac{1}{5}>\frac{1}{6},\cdots,\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n},$$

又

$$\frac{1}{2}>\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}}{n}.$$

把以上 n 各式相加，得

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}>\frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right),$$

即

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

例 6 求证：$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$

证 因为$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}<\frac{4}{5},\cdots,\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$. 若

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{99}{100},$$

$$B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{100}{101},$$

则有 $A<B$，从而

$$A^2\leqslant AB=\frac{1}{101}<\frac{1}{100}.$$

所以 $A<\frac{1}{10}$.

例 7 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为实数，且它们中任意两数之和非负；又 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是非负实数，且满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$. 求证：

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\geqslant a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2.$$

（第一届全国中学生数学冬令营选拔试题.）

证 因 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中任两数之和非负，故它们中至少有一个数是负的，不妨设这 n 个数中以 a_1 最小，则无论 a_1 为负或非负，都必有 $|a_1|\leqslant a_i(i=2,3,\cdots,n)$. 又由题设有

$$1-x_i\geqslant x_1\geqslant 0\ (i=2,\ 3,\ \cdots,\ n),$$

所以 $(a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n)-(a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2)$

$$=a_2x_2(1-x_2)+a_3x_3(1-x_3)+\cdots+a_nx_n(1-x_n)$$

$$\geqslant a_2x_2x_1+a_3x_3x_1+\cdots+a_nx_nx_1$$

$$\geqslant|a_1|x_1(x_2+x_3+\cdots+x_n)$$

$$=|a_1|x_1(1-x_1)\geqslant -a_1x_1(1-x_1),$$

即 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\geqslant a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2$.

四、反推法

这是一种间接证法，先假定要证的不等式成立，然后由它出发推出一系列与之等价的不等式（即要求推理过程的每一步都可逆），直到得到一个比较容易证明的不等式或一个明显成立的不等式. 由于等价性，从最后的不等式成立，得知原不等式成立. 这就是通常所说的分析法.

例 8 设 a,b,c 是三角形的三边，$m>0$. 求证

$$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}.$$

证 设需证的不等式成立，它等价于

$$\frac{a(b+m)+b(a+m)}{(a+m)(b+m)}>\frac{c}{c+m}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2ab+m(a+b)}{ab+m(a+b)+m^2}>\frac{c}{c+m}$$

$$\Leftrightarrow\frac{ab+m(a+b)+m^2}{2ab+m(a+b)}<\frac{c+m}{c}$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{m^2-ab}{2ab+m(a+b)}<1+\frac{m}{c}$$

$$\Leftrightarrow m^2c-abc<2abm+m^2(a+b)$$

$$\Leftrightarrow m^2[c-(a+b)]<ab(2m+c).$$

因 $c<a+b$，上式左边为负，而右边为正，故最后一个不等式成立.

例 9 设$\{a_n\}$是等差数列，且 $a_1>1$，公差$d>0$. 求证：数列$\{\log_{a_n}a_{n+1}\}$是递减的.

证 我们需要证明不等式

$$\log_{a_n}(a_n+d)>\log_{(a_n+d)}(a_n+2d).$$

因$a_1>1$，$d>0$，故$a_n>1$，$\log_{a_n}(a_n+d)>0$，从而上不等式等价于

$$1>\frac{1}{\log_{a_n}(a_n+d)}\log_{(a_n+d)}(a_n+2d)$$

$$=\log_{(a_n+u)}a_n\cdot\log_{(a_n+d)}(a_n+2d)$$

$$\Leftrightarrow 1=\tfrac{1}{2}\log_{(a_n+d)}(a_n+d)^2$$

$$>\log_{(a_n+d)}a_n\cdot\log_{(a_n+d)}(a_n+2d). \qquad (4)$$

下面证明这个不等式，由 $d>0$，易知$a_n(a_n+2d)<(a_n+d)^2$.

所以 $\log_{a_n+d}(a_n+d)^2>\log_{a_n+d}a_n(a_n+2d)$.

即 $$1>\frac{\log_{a_n+d}a_n+\log_{a_n+d}(a_n+2d)}{2}\quad(>0).$$

再由算术平均-几何平均不等式，得

$$1>\left[\frac{\log_{a_n+d}a_n+\log_{a_n+d}(a_n+2d)}{2}\right]^2$$

$$\geqslant\log_{a_n+d}a_n\log_{a_n+d}(a_n+2d).$$

注 本题是先用反推法把原式转换成较容易证明的不等式(4)，然后再用综合法证明(实际上是放大了)．这是证明较复杂的不等式的常用手段．

五、反证法

这与一般的反证法思想相同，即通过否定结论，导出矛盾，从而肯定结论．

例 10 以 $a,b,c\in R$，且 $a+b+c>0$，$ab+bc+ca>0$，$abc>0$．求证：$a>0,b>0,c>0$．

证 由 $abc>0$ 知 $a\neq0$．若 $a<0$，则 $bc<0$．又因 $a+b+c>0$，所以

$$b+c>-a>0.$$

于是 $$ab+bc+ca=a(b+c)+bc<0.$$

这与已知条件 $ab+bc+ca>0$ 矛盾．这就证得 $a>0$．同理可证 $b>0$，$c>0$．

例 11 设 $f(x)$，$g(x)$ 是 $[0,1]$ 上的实值函数，证明存在 x_0，$y_0\in[0,1]$，使得

$$|x_0y_0-f(x_0)-g(y_0)|\geqslant\frac{1}{4}.$$

证 反设这样的 x_0，y_0 不存在，取 $x_0=0$，$y_0=0$，有

$$|0\times0-f(0)-g(0)|=|f(0)+g(0)|<\frac{1}{4},$$

取 $x_0=0,y_0=1$，有 $|f(0)+g(1)|<\frac{1}{4}$；

取 $x_0=1,y_0=0$，有 $|f(1)+g(0)|<\frac{1}{4}$；

取 $x_0=1, y_0=1$，有 $|1-f(1)-g(1)|<\frac{1}{4}$.

所以 $1=|[1-f(1)-g(1)]+[f(1)+g(0)]+[f(0)+g(1)]$
$-[f(0)+g(0)]|\leqslant|1-f(1)-g(1)|+|f(1)+g(0)|$
$+|f(0)+g(1)|+|f(0)+g(0)|<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1.$

但这是不可能的

习 题 13

1. 设 $0<x<\frac{\pi}{2}$，求证：$\cos^2x+x\sin x<2$.

2. 长为 a,b,c 的三角形，其面积为$\frac{1}{4}$，而外接圆半径为 1，若$S=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$，$t=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$，则 S，t 的大小关系是

   (A) $S<t$；　(B) $S=t$；　(C) $S>t$；　(D) 不确定。

   (1986年全国高中数学联赛试题.)

3. 设 $x>0$，求证：$2^{x^{1/12}}+2^{x^{1/4}}\geqslant 2\cdot 2^{x^{1/6}}$.

4. 设 $a^3+b^3=2$，求证：$a+b\leqslant 2$.

5. 设 $n>1$，求证：$\lg^2(n+1)>\lg n\lg(n+2)$.

6. $0<A, B, C<\pi$，求证

$$\sin\frac{A+B+C}{3}\geqslant\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}.$$

等号何时成立.

7. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$；$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是实数，且

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k|=1, \quad \sum_{k=1}^{n}x_k=0,$$

记 $a_1=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k$；$a_n=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} a_k$. 求证

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right|\leqslant\frac{1}{2}(a_1-a_n).$$

第14讲　证明不等式的常用方法与技巧(二)

严　镇　军

一、数学归纳法

证明与自然数 n 有关(或出现数的 n 次方或含 n的代数式)的不等式时，常用数学归纳法.

例 1　设 $x>0$，定义一列函数如下，

$$f_n(x)=x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}\Big\}\text{共 } n \text{ 个 } x. \quad n=1,2\cdots.$$

试对一切小于 3 的正整数 m，证明

$$f_{n+1}(m)>2f_n(m+1), n=1,2,\cdots. \tag{1}$$

证　对 n 使用归纳法，当 $n=1$ 时，依定义及 $m\geqslant3$，有

$$f_2(m)=m^m>m^2,$$

$$2f_1(m+1)=2(m+1).$$

因为　$m^2-2(m+1)=(m-1)^2-3\geqslant4-3>0$，

所以　$f_2(m)>2f_1(m+1)$.

即 $n=1$ 时命题成立.

设 $n=k$ 时(1)成立，即对一切正整数 $m\geqslant3$，有

$$f_{k+1}(m)<2f_k(m+1).$$

于是，当 $n=k+1$ 时，对一切正整数 $m\geqslant3$，有

$$\begin{aligned}f_{k+2}(m)&=m^{f_{k+1}(m)}>m^{2f_k(m+1)}\\&=(m^2)^{f_k(m+1)}>[2(m+1)]^{f_k(m+1)}\\&=2^{f_k(m+1)}\cdot(m+1)^{f_k(m+1)}>2f_{k+1}(m+1).\end{aligned}$$

这就证得对一切正整数 n 及一切正整数 $m\geqslant3$，(1)成立.

例 2　设 $a_n>0$，且 $a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，求证：对一

切$n\in N$，有$a_n<\frac{1}{n}$.

证 由题设$0<a_2\leqslant a_1-a_1^2=a_1(1-a_1)$，又$a_1>0$，故$1-a_1>0$，即$a_1<1$. 设$n=k$时，$a_k<\frac{1}{k}$. 下面分两种情况证明：$a_{k+1}<\frac{1}{k+1}$.

(1) 若$a_k\leqslant\frac{1}{k+1}$，则

$$a_{k+1}\leqslant a_k(1-a_k)<a_k\leqslant\frac{1}{k+1}.$$

(2) 若$\frac{1}{k+1}<a_k<\frac{1}{k}$，则

$$a_{k+1}\leqslant a_k(1-a_k)<\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)==\frac{1}{k+1}.$$

注 在本题的证明中，我们之所以要分两种情形讨论，是为了便于放大乘积$a_k(1-a_k)$，即当$\frac{1}{k+1}<a_k<\frac{1}{k}$时，把乘积的第一个因子$a_k$用$\frac{1}{k}$代替，而把$(1-a_k)$中的$a_k$用$\frac{1}{k+1}$代替. 这种技巧在不等式的证明中是很有用的.

例3 已知$a,b\in R^+$，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$. 求证：对一切$n\in N$，

$$(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}.$$

(1988年全国高中数学联赛试题.)

证 当$n=1$时，左边$=0=$右边，故命题成立.

设$n=k$时命题成立，即有

$$(a+b)^k-a^k-b^k\geqslant 2^{2k}-2^{k+1}. \tag{2}$$

则当$n=k+1$时，

$$\begin{aligned}\text{左边}&=(a+b)^{k+1}-a^{k+1}-b^{k+1}\\&=(a+b)[(a+b)^k-a^k-b^k]+a^kb+ab^k.\end{aligned} \tag{3}$$

由$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，得$ab=a+b$. 又

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4,$$

所以 $$ab=a+b\geqslant 4.$$

从而 $$a^kb+ab^k\geqslant 2\sqrt{a^kb\cdot ab^k}=2\sqrt{(ab)^{k+1}}$$
$$\geqslant 2\cdot 2^{k+1}=2^{k+2}.$$

再由(2)及(3)知

$$左边\geqslant 4(2^{2k}-2^{k+1})+2^{k+2}=2^{2k+2}-2^{k+2}=右边.$$

这就证得对一切$n\in N$，不等式成立.

二、变量代换法

变量代换(或替换)法是数学中一种常用解题方法. 引进适当的代换，不仅能使不等式的证明简化，而且比较容易找到证题思路。不过具体使用何种代换，则因题而异.变量代换的总目的是化繁为简，具体说是化超越式为代数式；化无理式为有理式；化分式为整式；化高次式为低次式；等等.

例4 设$a>1$，$n\in N$，$n\geqslant 2$. 求证：

$$\sqrt[n]{a}-1<\frac{a-1}{n}.$$

证 直接处理$\sqrt[n]{a}$不容易，令$x=\sqrt[n]{a}-1(>0)$，则$a=(1+x)^n$. 于是，可把原来的无理不等式转化为有理不等式

$$(1+x)^k<1+nx.$$

由二项式定理及$n>1$，$x>0$，这个不等式显然成立.从而原不等式成立.

例5 设$x_1,x_2,\cdots,x_n\in R^+(n\geqslant 2)$，求证

$$\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2x_3}+\frac{x_2^2}{x_2^2+x_3x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2+x_nx_1}$$
$$+\frac{x_n^2}{x_n^2+x_1x_2}\leqslant n-1.$$

证 为了把式子写得更对称一些，记 $x_{n+1}=x_1$，$x_{n+2}=x_2$. 令

$$y_i=\frac{x_i^2}{x_{i+1}x_{i+2}},\quad i=1,2,\cdots.$$

则 $\dfrac{x_i^2}{x_i^2+x_{i+1}x_{i+2}}=1-\dfrac{1}{1+y_i}$，且 $y_1y_2\cdots y_n=1$. 于是，原不等式成为

$$\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{1+y_i}\right)\leqslant n-1,$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+y_i}\geqslant 1. \tag{4}$$

下面用归纳法证明这个不等式. 当 $n=2$ 时，有

$$\frac{1}{1+y_1}+\frac{1}{1+y_2}=\frac{2+y_1+y_2}{1+y_1+y_2+y_1y_2}$$
$$=\frac{2+y_1+y_2}{2+y_1+y_2}=1.$$

设 $y_1y_2\cdots y_k=1$ 时，有

$$\frac{1}{1+y_1}+\frac{1}{1+y_2}+\cdots+\frac{1}{1+y_n}\geqslant n-1.$$

则在 $y_1y_2\cdots y_ky_{k+1}=y_1y_2\cdots y_{k-1}(y_ky_{k+1})=1$ 时，有

$$\frac{1}{1+y_1}+\cdots+\frac{1}{1+y_{k-1}}+\frac{1}{1+y_ky_{k+1}}\geqslant 1.$$

易证 $$\frac{1}{1+y_k}+\frac{1}{1+y_{k+1}}>\frac{1}{1+y_ky_{k+1}},$$

所以 $$\frac{1}{1+y_1}+\frac{1}{1+y_2}+\cdots+\frac{1}{1+y_k}+\frac{1}{1+y_{k+1}}>1.$$

这就证得对一切自然数 $n\geqslant 2$，(4)成立，从而原不等式成立

三角代换法对于证明某些条件不等式是很有用的(这里所谓条件是指题设中有一个等式或不等式).

例6 设 $a,b\in R^+$，且 $a+b=1$，求证

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}$$

并确定等号成立的条件.

证 由题设可令 $a=\sin^2\varphi$, $b=\cos^2\varphi$, 于是由 $m^2+n^2\geqslant\frac{1}{2}(m+n)^2$, 有

$$\begin{aligned}
\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2&=\left(\sin^2\varphi+\frac{1}{\sin^2\varphi}\right)^2\\
&\quad+\left(\cos^2\varphi+\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)^2\\
&\geqslant\frac{1}{2}\left[\left(\sin^2\varphi+\frac{1}{\sin^2\varphi}\right)\right.\\
&\quad\left.+\left(\cos^2\varphi+\frac{1}{\cos^2\varphi}\right)\right]^2\\
&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\right)^2\\
&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{\sin^2 2\varphi}\right)^2\geqslant\frac{1}{2}(1+4)^2\\
&=\frac{25}{2}.
\end{aligned}$$

上面的推导中有两个不等号，第一个不等号中等号成立的充要条件是 $\sin^2\varphi=\cos^2\varphi$；第二个不等号中等号成立的充要条件是 $\sin^2 2\varphi=1$. 从而原不等式等号成立的条件是 $a=b=\frac{1}{2}$.

例 7 设 $x,y\in R, x^2+y^2\geqslant 1$, 求证

$$|x^2+2xy-y^2|\leqslant\sqrt{2}.$$

证 若 $x^2+y^2=k^2(0\leqslant k\leqslant 1)$, 令 $x=k\cos\varphi$, $y=k\sin\varphi$, 则

$$\begin{aligned}
|x^2+2xy-y^2|&=k^2|2\sin\varphi\cos\varphi+(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)|\\
&=k^2|\sin 2\varphi+\cos 2\varphi|=\sqrt{2}\,2k^2\left|\sin\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

下面讲一种比较常用的代换．例如，在假设条件 $a\geqslant b\geqslant c$ 下，证明一个关于 a,b,c 的不等式时，可令 $a=c+\delta_1$，$b=c+\delta_2$（$\delta_1\geqslant\delta_2\geqslant0$），然后进行论证．这种方法称为"增量法"或"松弛法"．它对于许多不等式，特别是对称不等式是很有效的。

例8 设 $a\geqslant4$，求证 $\dfrac{\lg a-\lg3}{\lg4-\lg3}>\dfrac{\lg(a-2)}{\lg2}$。

证 设 $a=4+\delta(\delta\geqslant0)$，则原不等式成为

$$\frac{\lg(4+\delta)-\lg3}{\lg4-\lg3}-1>\frac{\lg(2+\delta)}{\lg2}-1$$

$$\Leftrightarrow\frac{\lg(4+\delta)-\lg4}{\lg\frac{4}{3}}>\frac{\lg(2+\delta)-\lg2}{\lg2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\lg\left(1+\frac{\delta}{4}\right)}{2\lg\frac{4}{3}}>\frac{\lg\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}{\lg2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\lg\left(1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{16}\right)}{\lg\frac{16}{9}}>\frac{\lg\left(1+\frac{\delta}{2}\right)}{\lg2}.$$

因 $\lg\left(1+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2}{16}\right)>\lg\left(1+\frac{\delta}{2}\right)$，$\lg\frac{16}{9}<\lg2$，故最后不等式成立．从而，原不等式成立．

例9 设 x,y,z 是非负实数，且 $x+y+z=1$．求证

$$0\leqslant yz+zx+xy-2xyz\leqslant\frac{7}{27}.$$

（IMO25-1，即第25届国际数学奥林匹克第1题．）

证 由对称性，不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$，于是 $1=x+y+z\geqslant3z$．即 $z\leqslant\frac{1}{3}$，从而 $2xyz\leqslant\frac{2}{3}xy\leqslant xy$.

所以 $$yz+zx+(xy-2xyz)\geqslant0.$$

再证右边不等式，在前述假设中，有 $z\leqslant\frac{1}{3}$，$x+y\leqslant\frac{2}{3}$. 令 $x+y=\frac{2}{3}+\delta$，则 $z=\frac{1}{3}-\delta$，且 $0\leqslant\delta\leqslant\frac{1}{3}$. 又

$$xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{3}+\frac{\delta}{2}\right)^2,$$

所以

$$\begin{aligned}yz+zx+xy-2xyz&=z(x+y)+xy(1-2z)\\&\leqslant\left(\frac{1}{3}-\delta\right)\left(\frac{2}{3}+\delta\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{\delta}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}+2\delta\right)\\&=\frac{7}{27}-\frac{\delta^2}{4}+\frac{\delta^3}{2}=\frac{7}{27}-\frac{\delta^2}{2}\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\\&\leqslant\frac{7}{27}.\end{aligned}$$

三、函数方法

函数方法是证明不等式的一种基本方法，其内容相当广泛. 这里只就以下方面讨论：

1. 二次函数 $y(x)=x^2+bx+c$ 的应用；
2. 不等式 $|A\sin x|\leqslant A$ 的应用；
3. 利用已知函数的增减性，证明不等式.

例 10 设 a，b，x，$y,k\in R^+(k<2)$，且 $a^2+b^2-kab=1$，$x^2+y^2-kxy=1$. 求证

$$|ax-by|\leqslant\frac{2}{\sqrt{4-k^2}},\quad |ay+bx-kby|\leqslant\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}.$$

证 由题设条件，有

$$\begin{aligned}1&=(a^2+b^2-kab)(x^2+y^2-kxy)\\&=(ax-by)^2+(ay+bx-kby)^2\\&\quad-k(ax-by)(ay+bx-kby).\end{aligned}$$

记 $A=ax-by,B=ay+bx-kby$，则上式成为

$$A^2-kAB+B^2-1=0. \tag{4}$$

这是一个关于 A 的二次方程，因 $A\in R$，故判别式

$$\triangle=(-kB)^2-4(B^2-1)\geqslant 0,$$

所以 $$|B|\leqslant\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}.$$

同理，把(4)式看成是关于 B 的二次方程，得

$$|A|\leqslant\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}.$$

例 11 求证：对任何 $x\in R$，有

$$-\frac{1}{3}\leqslant\frac{6\cos x+\sin x-5}{2\cos x-3\sin x-5}\leqslant 3.$$

证 作万能代换 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，则

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

所以 $$y=\frac{6\cos x+\sin x-5}{2\cos x-3\sin x-5}=\frac{-11t^2+2t+1}{-7t^2-6t-3}.$$

记上式为 y，因 $6^2-4\times7\times3<0$，故分母 $-7t^2-6t-3$ 恒小于0。于是可整理成 t 的二次方程

$$(7y-11)t^2+2(3y+1)t+3y+1=0.$$

当 $y\neq\frac{11}{7}$ 时，由 $t\in R$，得

$$\begin{aligned}\triangle&=4[(3y+1)^2-(7y-11)(3y+1)]\\&=16(3y+1)(3-y)\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以 $$-\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3.$$

又 $y=\frac{11}{7}$ 时，上不等式也成立。

注 本题的方法，是证明关于 $\sin x$，$\cos x$ 的三角有理式 $R(\sin x,\ \cos x)$ 的常用方法，一般来说，用万能代换总可把 $R(\sin x,\ \cos x)$ 化成关于 t 的有理式。

例 12 设 $x_1+x_2+x_3=p$，$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=q$。求证：

(1) $p^2-3q\geqslant 0$;

(2) $\frac{p}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{p^2-3q}\leqslant x_i\leqslant\frac{p}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{p^2-3q}, i=1,2,3.$

证 (1) 由题设，有 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=p^2-2q$. 所以

$$
\begin{aligned}
0&\leqslant(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2\\
&=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)\\
&=2(p^2-2q)-2q=2p^2-6q.
\end{aligned}
$$

从而
$$p^2-3q\geqslant 0.$$

(2) 由对称性，只需对 x_1 证明第二个不等式. 为此，我们设法造出一个关于 x_1 的二次不等式.

因为
$$x_2+x_3=(x_1+x_2+x_3)-x_3=p-x_1,$$

所以
$$
\begin{aligned}
x_2x_3&=(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)-x_1(x_2+x_3)\\
&=q-x_1(p-x_1).
\end{aligned}
$$

于是
$$
\begin{aligned}
2[q-x_1(p-x_1)]&=2x_2x_3\leqslant x_2^2+x_3^2\\
&=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-x_1^2\\
&=p^2-2q-x_1^2,
\end{aligned}
$$

即
$$3x_1^2-2px_1+4q-p^2\leqslant 0.$$

因 $p^2-3q\geqslant 0$，二次方程 $3x_1^2-2px_1+4q-p^2=0$ 有两个实根

$$\alpha,\ \beta=\frac{p\pm 2\sqrt{p^2-3q}}{3},$$

所以
$$\frac{p}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{p^2-3q}\leqslant x_1\leqslant\frac{p}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{p^2-3q}.$$

例 13 设 a，b，A 及 B 都是已知实数，如果对任何 $x\in R$，$f(x)=1-a\cos x-b\sin x-A\cos 2x-B\sin 2x\geqslant 0$. 求证：

$$a^2+b^2\leqslant 2,\ A^2+B^2\leqslant 1.\ \text{(IMO 19-4.)}$$

证 用反证法. 其思路是：反设 $a^2+b^2>2$ 或 $A^2+B^2>1$. 设法找出一个数 x_0，使 $f(x_0)<0$ 就将导致矛盾. 为此，先用熟知的三角方法，通过引入辅助角 θ 及 φ，将 $f(x)$ 的项减少. 即

选取θ，φ，使

$$f(x)=1-\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)-\sqrt{A^2+B^2}\sin2(x+\varphi).$$

分别取$x_1=\frac{\pi}{4}-\theta, x_2=\frac{3\pi}{4}-\theta=\frac{\pi}{2}+x_1$，得

$$f(x_1)=1-\sqrt{a^2+b^2}\sin\frac{\pi}{4}-\sqrt{A^2+B^2}\sin2(x_1+\varphi)$$

$$<1-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}-\sqrt{A^2+B^2}\sin2(x_1+\varphi)$$

$$=-\sqrt{A^2+B^2}\sin2(x_1+\varphi). \tag{5}$$

$$f(x_2)<-\sqrt{A^2+B^2}\sin2(x_2+\varphi)$$

$$=\sqrt{A^2+B^2}\sin2(x_1+\varphi). \tag{6}$$

从(5)及(6)可见，$f(x_1)<0$ 及 $f(x_2)<0$ 总有一个成立，这与所设矛盾，即证得 $a^2+b^2\leqslant2$.

$A^2+B^2\leqslant1$ 的证明是类似的，留给读者自己做.

例 14 设 $x\in R$，求证

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\leqslant\cos(\sin x)-\sin(\cos x)$$

$$\leqslant2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

证 作如下三角变形：

$$\cos(\sin x)-\sin(\cos x)=\cos(\sin x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\cos x\right)$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\cos x+\sin x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\cos x-\sin x}{2}\right).$$

由 $\cos x\pm\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)$，有

$-\sqrt{2}\leqslant\cos x\pm\sin x\leqslant\sqrt{2}$，故

$$\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}-\frac{\cos x\pm\sin x}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

又$0<\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\pi}{2}$，且$\sin x$是$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$内的增函数，所以原不等式成立。

习　题　14

1．设$n\in N$，求证

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdots\cdot\frac{3n-2}{3n-1}<\frac{1}{\sqrt[3]{3n+1}}.$$

2．设有数列$a_1=f(a)$，$a_{n+1}=f(a_n)(n=1,\ 2,\ \cdots)$，这里$f(x)=2x(1-x)$，$0<a<1$．求证：$0\leqslant a_n\leqslant a_{n+1}$．

3．设$1<x_1<2$，且$x_{n+1}=1+x_n-\frac{1}{2}x_n^2(n=1,\ 2,\ \cdots)$．求证：

$$|x_n-\sqrt{2}|<2^{-n}(n\geqslant 3).$$

4．设a_1，a_2，b_1，$b_2\in R^+$，且$a_1c_1-b_1^2=a_2c_2-b_2^2$．求证：

$$(a_1-a_2)(c_1-c_2)-(b_1-b_2)^2\leqslant 0.$$

5．设$m,n\in R^+$，$0<x<1$，求证：$\frac{m^2}{1-x}+\frac{n^2}{x}\geqslant(m+n)^2$．

6．设a，b，$c\in R^+$，且$a+b>c$，求证：

$$a^3+b^3+c^3+3abc>2(a+b)c^2.$$

7．设x，$y\in R^+$，$n\in N$．求证：$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$．

8．设$|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$，求证：$ab+bc+ca>-1$．

9．设$a>b>0$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$．求证：$a\sec\theta-b\operatorname{tg}\theta\geqslant\sqrt{a^2+b^2}$．

10．设a_i，$b_i\in R^+(i=1,2,\cdots,n)$，且$b_1^2>b_2^2+\cdots+b_n^2$，求证：

$(a_1^2-a_2^2-\cdots-a_n^2)(b_1^2-b_2^2-\cdots-b_n^2)\leqslant(a_1b_1-a_2b_2-\cdots-a_nb_n)^2$，

等号当且只当$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots=\frac{b_n}{a_n}$时成立。

第15讲 重要不等式的应用

严 镇 军

一、排序不等式及其应用

排序不等式(又称排序原理) 设有两个有序数组

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\text{及}b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n,$$

则

$$\begin{aligned}&a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n(\text{顺序和})\\ \geqslant&a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}(\text{乱序和})\\ \geqslant&a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1(\text{逆序和}).\end{aligned}$$

其中 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 就是 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列. 当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时等号(对任一排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$)成立.

证 不妨设在乱序和 S 中 $j_n\neq n$(若 $j_n=n$ 则考虑 j_{n-1}), 且在和 S 中含有项 $a_kb_n(k\neq n)$, 则

$$a_kb_n+a_nb_{j_n}\leqslant a_kb_{j_n}+a_nb_n. \tag{1}$$

事实上 右－左 $=(a_n-a_k)(b_n-b_{j_n})\geqslant0$.

由不等式(2)知, 当 $j_n\neq n$ 时, 调换 $S=a_1b_{j_1}+\cdots+a_kb_{j_k}+\cdots+a_nb_{j_n}(j_k\neq n)$中 b_n 的 b_{j_n} 位置(其余不动), 所得新和$S_1\geqslant S$. 调整好 a_n 及 b_n 后, 接着再仿上调整 a_{n-1} 与 b_{n-1}, 又得 $S_2\geqslant S_1$. 如此至多经 $n-1$ 次调整得顺序和

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geqslant a_1b_{j_1}+a_2b_{j_2}+\cdots+a_nb_{j_n}. \tag{2}$$

这就证得"顺序和不小于乱序和". 显然, 当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 或 $b_1=b_2=\cdots=b_n$ 时(2)中等号成立. 反之, 若它们不全相等, 则必存在 j_n 及 k, 使 $b_n>b_{j_n}$, $a_n>a_k$. 这时(1)中不等号成立. 因而对这个排列(2)中不等号成立.

类似地可证"乱序和不小于逆序和".

例1 设 $a,b,c\in R^+$, 求证

$$a+b+c\leqslant\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}$$
$$\leqslant\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}.$$

证 由于不等式关于 a, b, c 对称，可设 $a\geqslant b\geqslant c>0$.

于是 $$a^2\geqslant b^2\geqslant c^2,\ \frac{1}{c}\geqslant\frac{1}{b}\geqslant\frac{1}{a}.$$

再对这两个有序数组用排序不等式，得

$a^2\cdot\frac{1}{a}+b^2\cdot\frac{1}{b}+c^2\cdot\frac{1}{c}$(逆序和)$\leqslant a^2\cdot\frac{1}{b}+b^2\cdot\frac{1}{c}+c^2\cdot\frac{1}{a}$（乱序和）

及 $$a^2\cdot\frac{1}{a}+b^2\cdot\frac{1}{b}+c^2\cdot\frac{1}{c}\leqslant a^2\cdot\frac{1}{c}+b^2\cdot\frac{1}{a}+c^2\cdot\frac{1}{b}.$$

以上两个同向不等式相加再除以 2，即得原式中第一个不等式．再考虑数组

$$a^3\geqslant b^3\geqslant c^3>0\text{及}\frac{1}{bc}\geqslant\frac{1}{ca}\geqslant\frac{1}{ab},$$

仿上可证第二个不等式，请读者自己完成．

注 利用排序不等式证明其他不等式时，必须制造出两个合适的有序数组．

例 2 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in N$，且各不相同．求证

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\leqslant a_1+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}.$$ （IMO20－5．）

证 设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的重新排列，满足

$$b_1<b_2<\cdots<b_n.$$

又 $$1>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{3^2}>\cdots>\frac{1}{n^2}.$$

所以 $$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geqslant b_1+\frac{b_2}{2^2}+\cdots+\frac{b_n}{n^2}.$$

由于 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是互不相同的自然数，故

$$b_1 \geqslant 1,\ b_2 \geqslant 2,\ \cdots,\ b_n \geqslant n.$$

从而
$$b_1 + \frac{b_2}{2^2} + \cdots + \frac{b_n}{n^2} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

故原式得证.

利用排序不等式及函数的单调性，可以写出许多不等式. 例如，设 $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \frac{\pi}{2}$，则

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sin x_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i \sin y_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_{n+1-i} \sin x_i.$$

其中 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一个排列.

利用排序不等式可以推出许多重要不等式.

二、平均不等式及其应用

人们常用平均的概念. 在课本中已讲过 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的算术平均和几何平均分别是

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

和
$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

此外，还有调和平均(在光学及电路分析中用到)

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

和平方平均(在统计学及误差分析中用到)

$$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

这四个平均值有以下关系：

$$H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant Q_n.$$

其中等号成立的充要条件都是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

首先证明算术平均-几何平均不等式 $A_n \geqslant G_n$. 记

$$x_1 = \frac{a_1}{G_n},\ x_2 = \frac{a_1 a_2}{G_n^2}, \cdots, x_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{G_n^n} = 1,$$

$$y_1=\frac{1}{x_1},\ y_2=\frac{1}{x_2},\cdots,y_n=\frac{1}{x_n}.$$

由于数组 $x_1, x_2,\cdots,x_n$ 和数组 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 中对应的数互为倒数，由排序不等式，得

$$\begin{aligned}&x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n(\text{逆序和})\\ \leqslant &x_1y_n+x_2y_1+\cdots+x_ny_{n-1},\end{aligned}$$

即
$$n\leqslant\frac{a_1}{G_n}+\frac{a_2}{G_n}+\cdots+\frac{a_n}{G_n}.$$

从而 $A_n\leqslant G_n$. 等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 或 $y_1=y_2=\cdots=y_n$ 时成立，而这两者都可得到 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

下面证明 $H_n\leqslant G_n$. 对 n 个正数 $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, $\cdots$, $\frac{1}{a_n}$ 应用 $G_n\leqslant A_n$，得

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\geqslant\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdots\frac{1}{a_n}}.$$

即 $G_n\geqslant H_n$(等号成立的条件是显然的).

最后证明 $A_n\leqslant Q_n$，它等价于

$$n(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\geqslant0.$$

而
$$\begin{aligned}\text{上式左边}=&(a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+\cdots+(a_1-a_n)^2\\&+(a_2-a_3)^2+\cdots+(a_2-a_n)^2\\&+\cdots+(a_{n-1}-a_n)^2\geqslant0,\end{aligned}$$

于是不等式及等号成立的条件都是显然的了. 从这个证明看，$A_n\leqslant Q_n$ 对一切 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in R$成立.

例 3 设 $x+y+z=0$，求证

$$6(x^3+y^3+z^3)^2\leqslant(x^2+y^2+z^2)^3.$$

证法一 由 $z=-(x+y)$，得 $x^3+y^3+z^3=3xyz$，记 $I=6(x^3+y^3+z^3)^2=54x^2y^2z^2$.现在从外形上看可以应用 $G_3\leqslant A_3$ 了，但只能得到较粗糙的不等式

$$I \leqslant 54\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^3 = 2(x^2+y^2+z^2)^3.$$

这就要对问题重新考虑．由于 $x+y+z=0$ 及对称性，不妨设 $x \geqslant 0, y \leqslant 0$，把 I 改写成

$$I = 216\frac{|xy|}{2}\cdot\frac{|xy|}{2}\cdot z^2$$

$$\leqslant 216\left(\frac{\frac{|xy|}{2}+\frac{|xy|}{2}+z^2}{3}\right)^3 = (2z^2+2|xy|)^3.$$

再注意到 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=z^2+2|xy|$，故 $2z^2+2|xy|=x^2+y^2+z^2$. 从而原式得证．

注 由上面证明可见，把同一个乘式用不同方式看成几个因式的乘积(如上面分别把 $x^2y^2z^2$ 分别看成 $x^2\cdot y^2\cdot z^2$ 及 $4\cdot\frac{|xy|}{2}\cdot\frac{|xy|}{2}\cdot z^2$)，应用 $G_n \leqslant A_n$ 所得的结果不同．当然，同一个和式也可用不同方式拆成若干个项的和．

证法二 由于 $x+y+z=0$ 及对称性，不妨设 $x, y \geqslant 0, z \leqslant 0$. 由 $x+y=-z$，得 $z^2=(x+y)^2$，从而

$$(x^2+y^2+z^2)^3 = 8(x^2+xy+y^2)^3.$$

由 $A_3 \geqslant G_3$，得

$$x^2+xy+z^2 = \frac{x(x+y)}{2}+\frac{y(x+y)}{2}+\frac{x^2+y^2}{2}$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{xy(x+y)^2}{4}\cdot\frac{x^2+y^2}{2}} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x^2y^2z^2}{4}},$$

所以 $$(x^2+y^2+z^2)^3 \geqslant 8\times 27\times\frac{x^2y^2z^2}{4} = 54x^2y^2z^2$$

$$= 6(x^3+y^3+z^3)^2.$$

例 4 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in R^+, S=a_1+a_2+\cdots+a_n$，求证

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\leqslant 1+S+\frac{S^2}{2!}+\cdots+\frac{S^n}{n!}.$$

证 由 $G_n\leqslant A_n$，得

$$\text{左边}=\left(\frac{n+a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n=\left(1+\frac{S}{n}\right)^n$$

$$=1+C_n^1\left(\frac{S}{n}\right)+C_n^2\left(\frac{S}{n}\right)^2+\cdots+C_n^m\left(\frac{S}{n}\right)^m$$

$$+\cdots+\left(\frac{S}{n}\right)^n.$$

因为 $n!=(n-m)!(n-m+1)\cdots n\leqslant(n-m)!\,n^m$，

所以 $C_n^m\left(\frac{S}{n}\right)^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{1}{n^m}S^m\leqslant\frac{S^m}{m!}.$

从而 $\text{左边}\leqslant 1+S+\cdots+\frac{S^m}{m!}+\cdots+\frac{S^n}{n!}.$

应用 $G_n\leqslant A_n$ 时，常要将乘幂看成连乘积，有时还要巧妙地凑上因子1.

例5 设 $n\in N$，求证：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$

证 由 $G_n\leqslant A_n$，有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(n+1)}=1\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}}_{n+1\text{个}}$$

$$<\left[\frac{1+(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}}{n+2}\right]^{n+2}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}.$$

所以 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$

例6 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是正有理数，且各不相同，求证

$$\left(\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\right)^{x_1+x_2+\cdots+x_n}>x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_n^{x_n}.$$

证 先设所有 $x_i\in N$，用 $A_n\geqslant G_n$，因 x_i 各不相同，得

$$\text{左边}=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\underbrace{(x_i+x_i+\cdots+x_i)}_{x_i\text{个}}}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\right)^{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

$$>x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_n^{x_n}.$$

下面再设 x_i 是正有理数. 记 m 是 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 的各分母的最小公倍数,则 $mx_1,mx_2,\cdots,mx_n$ 都是正整数,故由已证得的情形,

得
$$\left[\frac{(mx_1)^2+(mx_2)^2+\cdots+(mx_n)^2}{mx_1+mx_2+\cdots+mx_n}\right]^{mx_1+mx_2+\cdots+mx_n}$$

$$>(mx_1)^{mx_1}(mx_2)^{mx_2}\cdots(mx_n)^{mx_n}.$$

两边开 m 次方并除以$m^{(x_1+x_2+\cdots+x_n)}$即得原不等式.

例 7 设 $a,b,c,d\in R^+$,求证

$$\sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+adb}{4}}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}.$$

证 首先两次应用 $G_2\leqslant A_2$,得

$$\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}=\frac{1}{2}\left(ab\frac{c+d}{2}+cd\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{c+d}{2}+\left(\frac{c+d}{2}\right)^2\cdot\frac{a+b}{2}\right]$$

$$=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}\cdot\frac{a+b+c+d}{4}\leqslant\left(\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\right)^2$$

$$\frac{a+b+c+d}{4}=\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^3.$$

即
$$\sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}}\leqslant\frac{a+b+c+d}{4}.$$

再由 $A_4\leqslant Q_4$,有

$$\frac{a+b+c+d}{4}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}.$$

三、柯西不等式及其应用

柯西(Cauchy)不等式　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是任意实数，则

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$
$$\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$

等号当且只当 $b_i=ka_i$(k 为常数，$i=1,2,\cdots,n$)时成立.

证　不妨设 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$不全为 0，b_i 也不全为 0 (因为 a_i 或 b_i 全为 0 时，不等式显然成立). 记

$$A=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\,,\quad B=\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}\,,$$ 且令

$$x_i=\frac{a_i}{A}\,,\quad y_i=\frac{b_i}{B}\,(i=1,2,\cdots,n),$$

则　$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，$y_1^2+\cdots+y_n^2=1$. 于是原不等式成为

$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n\leqslant 1.$$

即
$$2(x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n)$$
$$\leqslant x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2.$$

它等价于$(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\geqslant 0$.

这个不等式显然成立，其中等号成立的充要条件是 $x_i=y_i(i=1,2,\cdots,n)$，从而原不等式成立，且等号成立的充要条件是

$$b_i=ka_i\left(k=\frac{A}{B}\right).$$

例 8　设 $a_i\in R^+(i=1,2,\cdots,n)$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，求证

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2\geqslant\frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

证　首先证明对任何 $a_i\in R^+(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2.$$

事实上，由柯西不等式，得

$$\text{上式左边}=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{a_i})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_i}}\right)^2$$

$$\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_i}}\right)^2=n^2.$$

下面证明原不等式，仍利用柯西不等式，得

$$\left[\sum_{i=1}^{n}1\cdot\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)\right]^2\leqslant n\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2$$

因为 $$\sum_{i=1}^{n}a_i=1,$$

所以 $$\left[\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)\right]^2=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2$$

$$=\left[1+\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\right]^2\geqslant(n^2+1)^2.$$

从而 $$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2\geqslant\frac{(n^2+1)^2}{n}.$$

例 9 设 $a_i,b_i,c_i,d_i\in R^+(i=1,2,\cdots,n)$，求证

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_ic_id_i\right)^4\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^4\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^4\cdot\sum_{i=1}^{n}c_i^4\cdot\sum_{i=1}^{n}d_i^4.$$

例 两次应用柯西不等式，得

$$左边=\left[\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)(c_id_i)\right]^4$$

$$\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)^2\right]^2\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}(c_id_i)^2\right]^2$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot b_i^2\right]^2\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}c_i^2\cdot d_i^2\right]^2$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^4\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^4\cdot\sum_{i=1}^{n}c_i^4\cdot\sum_{i=1}^{n}d_i^4.$$

例10 设 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，r_1,r_2,r_3 是 P 到三边 $a_1,a_2,$

a_3 的距离，R 是$\triangle ABC$ 外接圆半径．求证：

$$\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2R}}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}.$$

分析等号何时成立．

证 由柯西不等式，有

$$\begin{aligned}&\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\\&=\sqrt{a_1r_1}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_1}}+\sqrt{a_2r_2}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_2}}+\sqrt{a_3r_3}\cdot\sqrt{\frac{1}{a_3}}\\&\leqslant(a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3)^{1/2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

记 S 为 $\triangle ABC$ 的面积，则

$$a_1r_1+a_2r_2+a_3r_3=2S=2\cdot\frac{a_1a_2a_3}{4R}=\frac{a_1a_2a_3}{2R}.$$

所以$\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\leqslant\left(\frac{a_1a_2a_3}{2R}\right)^{1/2}\left(\frac{a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2}{a_1a_2a_3}\right)^{1/2}$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{\sqrt{2R}}(a_2a_3+a_3a_1+a_1a_2)^{1/2}\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt{2R}}\left[(a_2^2+a_3^2+a_1^2)^{1/2}(a_3^2+a_1^2+a_2^2)^{1/2}\right]^{1/2}\\&=\frac{1}{\sqrt{2R}}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^{1/2}.\qquad(3)\end{aligned}$$

在上述推导中用了两次柯西不等式，(3)中第一个不等式的等号成立的充要条件是

$$\sqrt{a_1r_1}=k\sqrt{\frac{1}{a_1}},\ \sqrt{a_2r_2}=k\sqrt{\frac{1}{a_2}},\ \sqrt{a_3r_3}=k\sqrt{\frac{1}{a_3}}.$$

即
$$a_1^2r_1=a_2^2r_2=a_3^2r_3.\qquad(4)$$

(3)中第二个不等式中等号成立的充要条件是

$$\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_1}{a_2}，\text{即 } a_1=a_2=a_3. \tag{5}$$

这样，由(4)及(5)，原不等式中等号成立的充要条件是：$\triangle ABC$ 是等边三角形，且 P 为内心(即 $r_1=r_2=r_3$)

习 题 15

1．设$a,b,c\in R^+$，利用排序不等式证明：

(1) $a^a b^b<a^b b^a(a\neq b)$.

(2) $a^{2a}b^{2b}c^{2c}\geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

(3) $a^a b^b c^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

(4) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$.

(5) $\frac{a^{12}}{bc}+\frac{b^{12}}{ca}+\frac{c^{12}}{ab}\geqslant a^{10}+b^{10}+c^{10}$.

2．设 a_1，a_2，…，$a_n\in R^+$，求证：

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\geqslant n.$$

3．设 $n\in N$，$n>1$，求证：$C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n>n\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$.

4．设 $a_1>0$，$d>0$，$a_{k+1}=a_k+d(k=1,\ 2,\ \cdots)$，求证

$$\frac{n}{d}\left(\sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_1}}-1\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<\frac{1}{a_1}+\frac{n-1}{d}\left(1-\sqrt[n-1]{\frac{a_1}{a_n}}\right).$$

5．求证：$\left(1-\frac{1}{365}\right)\left(1-\frac{2}{365}\right)\cdots\left(1-\frac{25}{365}\right)<\frac{1}{2}$.

6．用柯西不等式证明例 2 中的不等式.

7．设 $n\in N$，求证：$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{C_n^k}\leqslant\sqrt{n(2^n-1)}$.

第16讲　几何不等式的证法(一)

严　镇　军

几何问题中出现的不等式，称为几何不等式．由于这里较多地讨论三角形中的不等式，约定使用以下一些习惯记号：在$\triangle ABC$中，a，b，c表示三边长，A，B，C表示对应角；p表示半周长$\left(即\ p=\frac{1}{2}(a+b+c)\right)$；$\triangle$表示面积；$h_a$，$h_b$，$h_c$表示对应边上的高；$m_a$，$m_b$，$m_c$表示对应边上的中线，$R$及$r$分别表示外接圆及内切圆半径．

证明几何不等式，视其在论证过程中，以运用何种知识为主，大致上分为三种方法：几何方法；三角方法；代数方法．不过这三者也很难截然分开．

一、几何方法

下面几个例题主要是利用几何知识来论证的．

例1　在$\triangle ABC$中，求证：

$$\frac{3}{4}(a+b+c)<m_a+m_b+m_c<a+b+c.$$

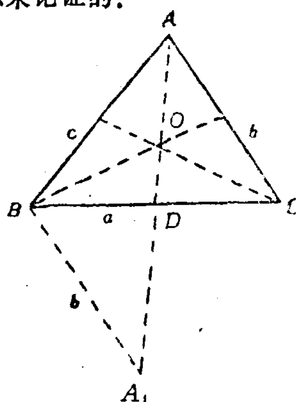


图 16-1

证　如图16-1，把BC边上的中线AD延长至A_1，使$AD=A_1D=m_a$．于是，从$\triangle ABA_1$得$b+c>2m_a$．同理$c+a>2m_b$，$a+b>2m_c$．把这三个同向不等式相加后除以2，即得

$$m_a+m_b+m_c<a+b+c.$$

设O为$\triangle ABC$的重心，则$AO+$

$BO>AB$，即$\frac{2}{3}m_a+\frac{2}{3}m_b>c$.

同理，$\frac{2}{3}m_b+\frac{2}{3}m_c>a$，$\frac{2}{3}m_c+\frac{2}{3}m_b>b$.把这三个同向不等式相加后除以$\frac{4}{3}$，即得$m_a+m_b+m_c>\frac{3}{4}(a+b+c)$.

例 2 在凸四边形$ABCD$中，已知$AB+BD\leqslant AC+CD$.求证：$AB<AC$.

证法一 如图16-2，凸四边形的对角线相交于O，则

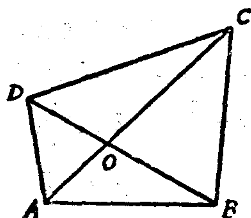


图 16-2

$$\begin{aligned}&AC+BD\\&=(AO+OC)+(BO+OD)\\&=(AO+OB)+(CO+OD)\\&>AB+CD,\end{aligned}$$

把此不等式与题设不等式相加，得$2AB<2AC$，即$AB<AC$.

证法二 反设$AB\geqslant AC$，则$\angle ACB\geqslant\angle ABC$.由于对角线$AC$在形内，所以$\angle BCD>\angle ACB\geqslant\angle ABC>\angle DBC$，从而$BD>DC$，于是$AB+BD>AC+DC$，这与题设矛盾.

例 3 在$\triangle ABC$中，P，Q，R将其周长三等分，且P,Q在AB边上，求证$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}>\frac{2}{9}$.（1988年全国高中数学联赛试题.）

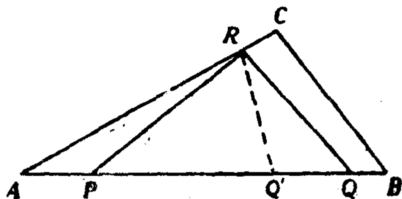


图 16-3

证 如图16-3，在AB上取Q'点，使$AQ'=PQ$，则

$$\begin{aligned}AQ'&=PQ\\&=\frac{1}{3}(AB+BC+CA)\\&>\frac{1}{3}(AB+AB)=\frac{2}{3}AB.\end{aligned}$$

且 $AP<\frac{1}{3}AB$，于是

$$AR=(AP+AR)-AP=\frac{1}{3}(AB+BC+CA)-AP$$

$$>\frac{1}{3}(AB+BC+CA)-\frac{1}{3}AB>\frac{1}{3}AC.$$ 所以

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle AQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AR\cdot AQ'\sin A}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A}>\frac{\frac{2}{3}AB\cdot\frac{1}{3}AC}{AB\cdot AC}=\frac{2}{9}.$$

注 题中的$\frac{2}{9}$是最佳的. 例如，取一个周长为 1 的$\triangle ABC$，且$AB=AC$，令Q与B重合(图 16-4). 当$BC\to 0$时，$AB=AC\to\frac{1}{2}$，$BP=\frac{1}{3}$，$AP\to\frac{1}{6}$，$AR\to\frac{1}{6}$，所以

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABR}-S_{\triangle APR}}{S_{\triangle ABC}}\longrightarrow\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2}{9}.$$

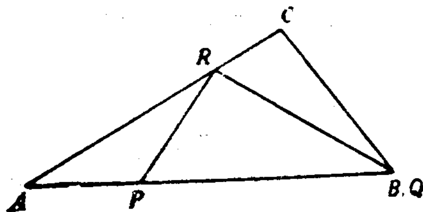


图 16-4

例 4 设两个全等矩形的边有 8 个交点，即它们的公共部分是一个八边形. 求证：$S_{八边形}>\frac{1}{2}S_{矩形}$.

证 设全等矩形$PQRS$和$P_1Q_1R_1S_1$有 8 个交点A_1，A_2，…，A_8(必然是每边与另两边相交，图 16-5 中未标出A_2，A_4，A_6，A_8). 作$A_5N\perp PS$，$A_5M\perp P_1S_1$(N，M是垂足)，则$A_5M=A_5N=b$(a，b是矩形的边长). 于是$\triangle A_5A_1M\cong\triangle A_5A_1N$，从而

$\angle A_5A_1M=\angle A_5A_1N$. 即 A_1A_5 是 PS 与 P_1S_1 交角的平分线.

同理, A_3A_7 是 RS 与 R_1S_1 交角的平分线. 由于 $PS\perp RS$, $P_1S_1\perp R_1S_1$, 所以, $A_1A_5\perp A_3A_7$ 或 $A_1A_5\parallel A_3A_7$. 但 A_1A_5 与 A_3A_7 必相交, 从而只能 $A_1A_5\perp A_3A_7$.

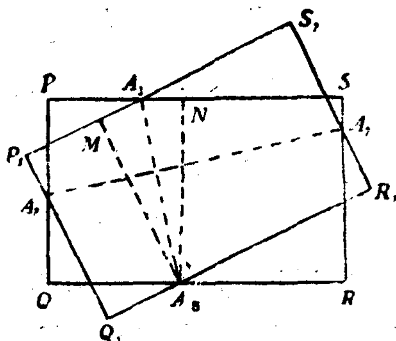


图 16-5

所以 $S_{8边形A_1A_2\cdots A_8}>S_{4边形A_1A_3A_5A_7}$

$$=\frac{1}{2}A_1A_5\cdot A_3A_7\geqslant\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}S_{矩形PQRS}.$$

(图中未作出四边形 $A_1A_3A_5A_7$).

例 5 在 Rt$\triangle ABD$ 中, AD 是斜边上的高, M,N 分别是 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 的内心, 连结 MN 并延长分别交 AB 与 AC 于 K 及 L. 求证: $S_{\triangle ABC}\geqslant 2S_{\triangle AKL}$. (IMO29-5.)

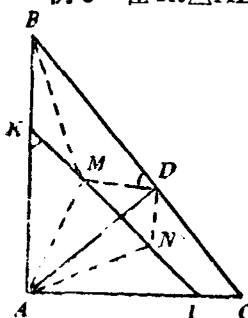


图 16-6

证 依题意作图(图 16-6), 连结 AM,AN,DM,DN 及 BM.

由于 $\triangle ADB\backsim\triangle ACD$, 并注意到 DM 与 DN 是这两个相似三角形对应角的分角线, 而 M, N 又分别是它们的内心, 故

$$\frac{DM}{DN}=\frac{BD}{AD}\ (=相似比).$$

又易知 $\angle MDN=90^\circ$, 从而 $\triangle NMD\backsim\triangle ABD$. 所以, $\triangle NMD$ 与 $\triangle ABD$ 的对应边的交角相等, 例如, NM 与 AB 的交角等于

DM与DB的交角．即$\angle LKA=\angle BDM=45°$．$\triangle AKL$为等腰直角三角形．又由$\angle MKA=\angle MDA$，$\angle MAK=\angle MAD$（因$M$是内心），$AM$公用，可见$\triangle AMK\cong\triangle AMD$．故$AK=AD=AL$．

于是 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC$，

$$S_{\triangle AKL}=\frac{1}{2}AK\cdot AL=\frac{1}{2}AD^2=\frac{1}{2}\frac{AB^2\cdot AC^2}{BC^2}$$

$$=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\frac{AB\cdot AC}{AB^2+AC^2}\leqslant\frac{1}{4}AB\cdot AC.$$

所以 $$S_{\triangle ABC}\geqslant 2S_{\triangle AKL}.$$

注 这个证法是我国一名得金牌的选手作出的，比竞赛委员会公布的解答简单得多．其妙处有两点：(1)利用了两个相似三角形中对应线段的比等于相似比；(2)利用了对应边夹角的关系．

二、三角方法

这一小节，着重通过三角形中的不等式，阐述三角知识的应用．最常用的三角知识是：

1．三角恒等变形 这主要是应用和（差、倍、半）角公式，积化和差及和差化积公式等，制造出便于应用于已知不等式的形式，以完成命题的证明．

2．边角互换 这主要是利用各三角函数的定义、正弦定理及余弦定理等，把一个关于角的不等式转换成关于边（或其他元素）的不等式，或者反过来，把关于边（或其他元素）的不等式转换成关于角的不等式．具体做时，也可能是只把不等式中关于角（或边及其他元素）的一部分式子转换成关于边（或角及其他元素）的式子，从而制造出便于处理的形式．

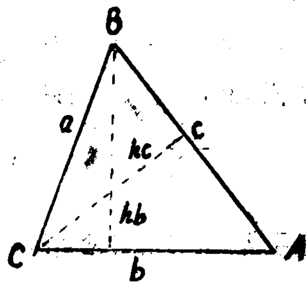


图 16-7

例6 证明：在$\triangle ABC$中，

$c \geqslant b \Longleftrightarrow c + h_c \geqslant b + h_b$.

证　把h_b和h_c都用$\sin A$表示(图16-7)，得

$c + h_c - (b + h_b) = c + b\sin A - b - c\sin A = (c-b)(1-\sin A)$.
因为$1 - \sin A > 0 (0 < A < \pi)$，所以$c \geqslant b \Longleftrightarrow c + h_c \geqslant b + h_b$.

例7　证明：在$\triangle ABC$中，有$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\triangle$.

问等号何时成立(这个不等式叫魏琴伯克(Weitzenberk)不等式).

证法一　由余弦定理及三角形的面积公式，有

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}\triangle = a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos C - 2\sqrt{3}ab\sin C$$
$$= 2[a^2 + b^2 - 2ab\sin(C + 30°)] \geqslant 2(a^2 + b^2 - 2ab) \geqslant 0.$$

易知等号成立的充要条件是 $C + 30° = 90°$ 且 $a = b$. 即当且仅当$\triangle ABC$是正三角形时等号成立

证法二　由正弦定理，有

$$\triangle = \frac{1}{2}ab\sin C = 2R^2\sin A\sin B\sin C,$$

故
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\triangle} = \frac{4\sin^2 A + 4\sin^2 B + 4\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}$$
$$\geqslant 6\sqrt[3]{\frac{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}{\sin^3 A\sin^3 B\sin^3 C}} = 6\frac{1}{\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}}. \tag{1}$$

利用积化和差公式，不难证明 $\sin A\sin B\sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$，　(2)

等号当且仅当 $A = B = C = \frac{\pi}{3}$时成立(具体证明留给读者，也可参看下面例8后的注). 再把(2)应用于(1)，得

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\triangle} \geqslant 6\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{8}}} = 4\sqrt{3}.$$

等号成立条件的讨论从略.

例8　在$\triangle ABC$中，求证：$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leqslant \frac{9}{4}$.　(3)

等号当且只当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时成立.

证 作如下的三角恒等变形，得

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C$$
$$=\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+(1-\cos^2C)$$
$$=2-\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2C$$
$$=2+\cos C\cos(A-B)-\cos^2C$$
$$\leqslant 2+|\cos C|-\cos^2C=-\left(|\cos C|-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\leqslant\frac{9}{4}.$$

等号成立条件的讨论留给读者.

注 (1) 由不等式(3)及习题13第6题所证不等式

$$3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\geqslant\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\,(0<\alpha,\beta,\gamma<\pi) \qquad (4)$$

可以得到许多不等式，例如，在△ABC中，有

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}; \qquad (5)$$

$$\sin A\sin B\sin C\leqslant\frac{3}{8}\sqrt{3}; \qquad (6)$$

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}; \qquad (7)$$

$$\cos A\cos B\cos C\leqslant\frac{1}{8}; \qquad (8)$$

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{2}; \qquad (9)$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8}; \qquad (10)$$

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{3}; \qquad (11)$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\leqslant\frac{3}{8}\sqrt{3}; \qquad (12)$$

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\geqslant-\frac{3}{2};\qquad(13)$$

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\geqslant\frac{3}{4};\qquad(14)$$

等等．(5)—(14)都是当且仅当$A=B=C=\frac{\pi}{3}$时等号成立．

在不等式(4)中，令$\alpha+\beta+\gamma=\pi$，即得(5)；(6)由(5)及$G_3\leqslant A_3$即得；(7),(9),(11)都可由(4)得到；(8),(10),(12)则分别由(7),(9),(11)得到；(13),(14)则与(3)等价．

(2) 利用正弦定理或余弦定理，可把(3)及(5)—(14)转换成关于边的不等式．例如由余弦定理，得

$$\begin{aligned}&\cos A+\cos B+\cos C\\&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\&=\frac{1}{2abc}[a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)]\\&=\frac{1}{2abc}[a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)]\leqslant\frac{3}{2},\end{aligned}$$

即 $$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqslant 3abc.$$

最后这个不等式曾作为IMO6—2.

下面证明一个著名的不等式．

埃德斯-莫德尔(Erdös-Mordell)不等式 设P为$\triangle ABC$内部或边上一点，P到三边的距离为PD，PE及PF，则

$$PA+PB+PC\geqslant 2(PD+PE+PF).$$

当且仅当$\triangle ABC$是正三角形，且P为中心时等号成立．

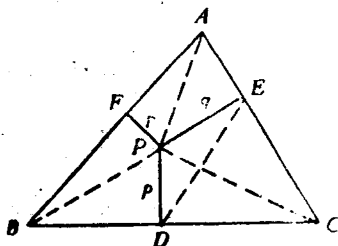


图 16-3

证 如图16-8，记$PD=p$，$PE=q$，$PF=r$．因$\angle DPE=180°$

$-\angle ACB=\angle A+\angle B$，所以

$$DE=\sqrt{p^2+q^2-2pq\cos(A+B)}$$
$$=\sqrt{(p\sin B+q\sin A)^2+(p\cos B-q\cos A)^2}$$
$$\geqslant p\sin B+q\sin A,$$

由于 P,D,C,E 四点共圆，CP 是此圆的直径，从而 $DE=CP\sin C$．所以$PC=\dfrac{DE}{\sin C}\geqslant\dfrac{p\sin B+q\sin A}{\sin C}$

同理 $PA\geqslant\dfrac{q\sin C+r\sin B}{\sin A}$，$PB\geqslant\dfrac{r\sin A+p\sin C}{\sin B}$．

所以 $PA+PB+PC$

$$\geqslant p\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)+q\left(\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin C}\right)$$
$$+r\left(\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin A}\right)$$
$$\geqslant 2(p+q+r)=2(PD+PE+PF).$$

等号成立的条件请读者自己分析．

埃德斯-莫德尔不等式是一个很强的不等式，有许多推论及应用（见习题16）．

例9 设$\triangle ABC$及$\triangle A_1B_1C_1$的边长分别为a，b，c及a_1，b_1，c_1，面积分别为Δ及Δ_1．求证：佩多(Pedoe)不等式

$$a^2(b_1^2+c_1^2-a_1^2)+b^2(c_1^2+a_1^2-b_1^2)+c^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2)$$
$$\geqslant 16\Delta\Delta_1. \qquad (15)$$

问等号何时成立。

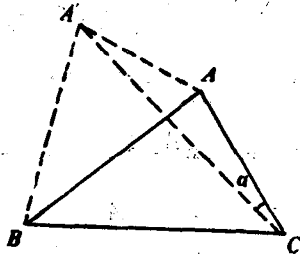


图 16-9

证 如图16-9，以 BC 为一边，在 A 点的同侧作$\triangle A'BC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，则 $A'C=\dfrac{ab_1}{a_1}$.不妨设$\angle C\geqslant\angle C_1$，令$\alpha=\angle C-\angle C_1$．对$\triangle AA'C$用余弦定理，得

$$AA'^2=b^2+\left(\frac{ab_1}{a_1}\right)^2-2b\cdot\frac{ab_1}{a_1}\cos\alpha\geqslant 0,$$

即 $\quad a_1^2b^2+a^2b_1^2-2aba_1b_1(\cos C\cos C_1+\sin C\sin C_1)\geqslant 0$。

再将 $\quad \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab},\cos C_1=\dfrac{a_1^2+b_1^2-c_1^2}{2a_1b_1},$

$$ab\sin C=2\triangle,\qquad a_1b_1\sin C_1=2\triangle_1$$

代入上式并化简，即得(15)。

显然，当且仅当A与A'两点重合，即$\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$时等号成立.

习 题 16

1. 在$\triangle ABC$中，AD,BE,CF为角平分线，求证：

   $S_{DEF}\leqslant\frac{1}{4}S_{ABC}$.等号何时成立?

2. 设D是$\triangle ABC$内一点,$AB=AC,\angle ADC>\angle ADB$.求证:$DB>DC$.

3. 直线l上有四点，依次记为A,B,C,D.求证：对l外任意一点E，有

$$AE+ED+|AB-CD|>BE+CE.$$

4. 平面上给定半径为1的圆及n个点$A_1,A_2,\cdots,A_n$. 求证：必可在圆上找到点M，使$MA_1+MA_2+\cdots+MA_n\geqslant n$.

5. 在$\triangle ABC$中，求证：

   (1) $p\sin^2A+q\sin^2B>pq\sin^2C(p,q>0$且$p+q=1)$;

   (2) $x^2+y^2+z^2\geqslant 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C$,问等号何时成立;

   (3) $\triangle\leqslant\dfrac{3abc}{4\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\leqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{abc}{a+b+c}$,

   (4) $\dfrac{\sin B\sin C}{\sin A}\leqslant\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}$;

   (5) $\sin A\sin\dfrac{A}{2}+\sin B\sin\dfrac{B}{2}+\sin C\sin\dfrac{C}{2}\leqslant\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

6. (1) 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，D是BC上一点，D到两腰的距离为DE及DF. 求证：$\frac{1}{2}(AD+BC)\geqslant DE+DF$.

   (2) 设I是$\triangle ABC$的内心，求证：$AI+BI+CI\geqslant 6r$.

第17讲　几何不等式的证法（二）

严镇军

一、代数方法

许多几何不等式的论证过程中，以代数运算为主，并常要应用前面讲过的一些重要不等式，这称为代数方法．特别是证明三角形中的不等式时，要注意应用以下手段．

1．三边长的固有关系：$a<b+c, b<c+a, c<a+b$.

2．用面积转换要证的不等式，对于涉及到面积的不等式，常用海伦(Heron)公式：

$$\triangle=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ .$$

3．边长的大小顺序关系与对应角的大小顺序关系相同，而与对应高、中线及分角线长（记为t_a，t_b，t_c）的大小顺序关系相反．即若$a\geqslant b\geqslant c$，则

$$A\geqslant B\geqslant C;\qquad h_a\leqslant h_b\leqslant h_c;$$

$$m_a\leqslant m_b\leqslant m_c;\ t_a\leqslant t_b\leqslant t_c.$$

例1　在$\triangle ABC$中，a,b,c都是有理数．求证：

$$\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^a\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^b\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^c\leqslant 1.$$

证　因a，b，c是正有理数，故存在$m\in N$，使ma，mb，$mc\in N$．又a,b,c是三边，有

$$1+\frac{b-c}{a}>0,\ 1+\frac{c-a}{b}>0,\ 1+\frac{a-b}{c}>0.$$

再由$G_n\leqslant A_n$，得

$$\left[\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^{ma}\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^{mb}\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^{mc}\right]^{\frac{1}{ma+mb+mc}}$$

$$\leqslant \frac{ma\left(1+\frac{b-c}{a}\right)+mb\left(1+\frac{c-a}{b}\right)+mc\left(1+\frac{a-b}{c}\right)}{ma+mb+mc}=1.$$

故原不等式成立.

例2 在$\triangle ABC$中，求证：

$$\frac{1}{2rR}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\leqslant\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\leqslant\frac{1}{4r^2}.$$

证 首先第二个不等号由$A_3\leqslant Q_3$即得.

易证 $$xy+yz+zx\leqslant\frac{1}{3}(x+y+z)^2.$$

从而 $$\frac{1}{2rR}=\frac{1}{2\cdot\frac{\triangle}{p}\cdot\frac{abc}{4\triangle}}=\frac{2p}{abc}=\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}$$

$$\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2.$$

又由 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，得

$$\frac{1}{4r^2}=\frac{p^2}{4\triangle^2}=\frac{p}{4(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{4(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(p-b)(p-c)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(p-c)(p-a)}+\frac{1}{(p-a)(p-b)}\right].$$

而 $$4(p-b)(p-c)\leqslant[(p-c)+(p-b)]^2=a^2,$$

故 $$\frac{1}{a^2}\leqslant\frac{1}{4(p-b)(p-c)}.$$

同理 $$\frac{1}{b^2}\leqslant\frac{1}{4(p-c)(p-a)},\quad \frac{1}{c^2}\leqslant\frac{1}{4(p-a)(p-b)}.$$

所以 $$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\leqslant\frac{1}{4r^2}.$$

例3 在$\triangle ABC$中，$\angle C$是直角，求证：

$$r \leqslant \frac{c}{2(1+\sqrt{2})}.$$

证 由于$ab=2\triangle=r(a+b+c)$，故

$$r=\frac{ab}{a+b+c}.$$

又 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，$c^2=a^2+b^2\geqslant 2ab$，$c\geqslant\sqrt{2ab}$，

所以$\frac{r^2}{c^2}=\frac{a^2b^2}{(a+b+c)^2c^2}\leqslant\frac{a^2b^2}{(2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab})^2 2ab}$

$$=\frac{1}{4(1+\sqrt{2})^2},$$

即 $$r=\frac{c}{2(1+\sqrt{2})}.$$

例 4 设有五条线段，其中任意三条都可组成一个三角形，求证至少有一个三角形是锐角三角形.

证 设五条线段长依次为 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4\leqslant a_5$. 反设其中任三条组成的三角形都不是锐角三角形. 则有$a_3^2\geqslant a_1^2+a_2^2$，$a_4^2\geqslant a_2^2+a_3^2$及$a_5^2\geqslant a_3^2+a_4^2$. 所以

$$\begin{aligned}a_5^2&\geqslant(a_1^2+a_2^2)+(a_2^2+a_3^2)\\&\geqslant(a_1^2+2a_2^2)+(a_1^2+a_2^2)=2a_1^2+3a_2^2\\&>a_1^2+a_2^2+(a_1^2+a_2^2)\geqslant a_1^2+a_2^2+2a_1a_2\\&=(a_1+a_2)^2.\end{aligned}$$

即$a_5>a_1+a_2$，这样，线段 a_1,a_2,a_5 就不能组成一个三角形，与题设矛盾. 命题得证.

例 5 设$\triangle ABC$，$\triangle A_1B_1C_1$ 及 $\triangle A_2B_2C_2$ 的面积分别为$\triangle$，$\triangle_1$及$\triangle_2$，且$a=a_1+a_2$，$b=b_1+b_2$，$c=c_1+c_2$(a_1,b_1,c_1及a_2,b_2,c_2分别是$\triangle A_1B_1C_1$及$\triangle A_2B_2C_2$的边长). 求证：

$$\triangle\geqslant 4\sqrt{\triangle_1\triangle_2}.$$

证 记p_1,p_2是$\triangle A_1B_1C_1$及$\triangle A_2B_2C_2$的半周长，则

$$p=p_1+p_2,\ p-a=(p_1-a_1)+(p_2-a_2),\text{所以}$$

$$p^2 \geqslant 4p_1p_2, (p-a)^2 \geqslant 4(p_1-a_1)(p_2-a_2).$$

同理 $(p-b)^2 \geqslant 4(p_1-b_1)(p_2-b_2)$,

$(p-c)^2 \geqslant 4(p_1-c_1)(p_2-c_2)$.

再由海伦公式，得

$$\begin{aligned}\triangle^4 &= p^2(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2\\ &\geqslant 4^4 p_1(p_1-a_1)(p_1-b_1)(p_1-c_1)\\ &\quad \cdot p_2(p_2-a_2)(p_2-b_2)(p_2-c_2)\\ &= 4^4 \triangle_1^2 \triangle_2^2,\end{aligned}$$

即 $\triangle \geqslant 4\sqrt{\triangle_1 \triangle_2}$.

例 6 在$\triangle ABC$中，求证：

$$a(m_b+m_c-m_a)+b(m_c+m_a-m_b)+c(m_a+m_b-m_c) \geqslant 6\triangle.$$

证 由对称性，不妨设$a \geqslant b \geqslant c$，则

$$m_a \leqslant m_b \leqslant m_c.$$

由排序不等式，得

$S = am_a + bm_b + cm_c \leqslant cm_a + am_b + bm_c$(记作$S_1$),

$S \leqslant bm_a + cm_b + am_c$(记作$S_2$).

故 $2S \leqslant S_1 + S_2$.

所以，原式左边$= S_1 + S_2 - S \geqslant S = am_a + bm_b + cm_c$.

而 $m_a \geqslant h_a, m_b \geqslant h_b, m_c \geqslant h_c$.

所以，原式左边$\geqslant ah_a + bh_b + ch_c = 6\triangle$.

注 显然，把本题不等式中的 m_a, m_b, m_c 换成 t_a, t_b, t_c 或 h_a, h_b, h_c，结论仍成立.

例 7 在$\triangle ABC$中，求证：

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

证 因$c(a-b)^2 + 4abc = c(a+b)^2$，所以

原式左边 - 原式右边

$= a[(b-c)^2 - a^2] + b[(c-a)^2 - b^2] + c[(a+b)^2 - c^2]$

$= a(b-c-a)(b-c+a) + b(c-a-b)(c-a+b)$

$$+c(a+b-c)(a+b+c)$$
$$=(a+b-c)(ab-ac-a^2-bc+ab-b^2+ac+bc+c^2)$$
$$=(a+b-c)[c^2-(a-b)^2]$$
$$=(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)>0.$$

最后一个不等号之所以成立，是由于三角形两边之和大于第三边.

注 本题的证法，表现了较高的代数变形技巧：因式分解是证明不等式的常用手段.从上述证明的最后一个不等式可见，本题的不等式还是三个正数 a,b,c 能组成一个三角形的充要条件，而且还可以看出这个复杂的不等式是怎样得到的.

例8 设 a_i,b_i,c_i 及 $R_i(i=1,2)$ 是 $\triangle A_iB_iC_i$ 的三边及外接圆半径. 求证：当 $m,n\geqslant 1$ 时，有

$$a_1^m a_2^n+b_1^m b_2^n+c_1^m c_2^n\leqslant 9\cdot 2^{m+n-2}R_1^m R_2^n.$$

证 由柯西不等式，得

$$a_1^m a_2^n+b_1^m b_2^n+c_1^m c_2^n$$
$$\leqslant(a_1^{2m}+b_1^{2m}+c_1^{2m})^{1/2}(a_2^{2n}+b_2^{2n}+c_2^{2n})^{1/2}$$

而 $a_1^{2m}+b_1^{2m}+c_1^{2m}=(2R_1)^{2m}(\sin^{2m}A_1+\sin^{2m}B_1+\sin^{2m}C_1)$

$$\leqslant(2R_1)^{2m}(\sin^2 A_1+\sin^2 B_1+\sin^2 C_1)$$
$$\leqslant(2R_1)^{2m}\cdot\frac{9}{4}.$$

这里最后一个不等式利用了第16讲例8的结果.

同理 $$(a_2^{2n}+b_2^{2n}+c_2^{2n})\leqslant(2R_2)^{2n}\cdot\frac{9}{4}.$$

所以

$$a_1^m a_2^n+b_1^m b_2^n+c_1^m c_2^n\leqslant 9\cdot 2^{m+n-2}R_1^m R_2^n.$$

二、变量代换法

设$\triangle ABC$的内切圆分别切 BC，CA，AB于D，E，F. 记 $AE=AF=x$，$BD=BF=y$，$CD=CE=z$(如图17-1)，则

$$\begin{cases} a=y+z, & (1) \\ b=z+x, & (2) \\ c=x+y, & (3) \end{cases}$$

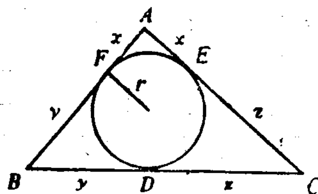


图 17-1

且$x>0$，$y>0$，$z>0$. 反过来，若三个正数a，b，c可以表示为(1)—(3)的形式，则

$$a+b=x+y+2z>x+y=c.$$

同理，有$b+c>a$，$c+a>b$. 因而a，b，c是一个三角形的三边长. 换句话说，(1)—(3)是三个正数$a,b,c(x,y,z>0)$是一个三角形的三边长的充要条件.

从上面的讨论可见，为了证明一个关于三角形的三边不等式，可通过变换(1)—(3)转换成三个正数x,y,z的代数不等式. 由于三边a,b,c完全确定三角形，从而三角形的各元素都可通过变换(1)—(3)用x，y，z表示. 下面是三角形中部分元素，经变换(1)—(3)后，用x，y，z的表达式：

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=x+y+z;$$

$$\triangle=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{xyz(x+y+z)};$$

$$r=\frac{\triangle}{p}=\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}};$$

$$R=\frac{abc}{4\triangle}=\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{x},\ \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{y},\ \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{z}.$$

通过变换(1)—(3)，原则上可以把一切三角形中的不等式化成关于三个正数x，y，z的代数不等式. 具体应用时，上述变换方法，对某些关于长度元素、面积及$\operatorname{tg}\frac{A}{2}$，$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$，…的不等式比较简单. 从(1)—(3)可解得

$$x = \frac{1}{2}(b+c-a),\ y=\frac{1}{2}(c+a-b),\ z=\frac{1}{2}(a+b-c).$$

所以，在证明三角形中的不等式时，有时也用这三个式子，或

$$x=b+c-a, y=c+a-b, z=a+b-c$$

作变量代换.

例 9 在$\triangle ABC$中，求证：

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\,\triangle+(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2.$$

等号何时成立？

证 作变量代换(1)—(3)，得原不等式的等价不等式($x,y,z\in R^+$)

$$(y+z)^2+(z+x)^2+(x+z)^2 \geqslant 4\sqrt{3xyz(x+y)}$$
$$+(z-y)^2+(x-z)^2+(y-x)^2$$
$$\Longleftrightarrow 4(xy+yz+zx) \geqslant 4\sqrt{3xyz(x+y+z)}$$
$$\Longleftrightarrow (xy+yz+zx)^2 \geqslant 3xyz(x+y+z)$$
$$\Longleftrightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geqslant x^2yz+y^2zx+z^2xy$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}[(xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2] \geqslant 0.$$

最后这个不等式显然成立，且等号当且只当$x=y=z$时成立.所以，原不等式当且只当$a=b=c$时等号成立.

注 本题不等式是第16讲例7中魏琴伯克不等式的推广.

例 10 求证：$R \geqslant 2r$.

证 作变换(1)—(3)，原不等式等价于

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{xyz(x+y+z)}} \geqslant 2\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$$
$$\Longleftrightarrow (x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz.$$

最后这个不等式由$A_2 \geqslant G_2$即得.

例 11 求证：$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2} \geqslant 3\sqrt{3}$.

证 作变换(1)—(3)，原不等式等价于

$$\frac{x}{r}+\frac{y}{r}+\frac{z}{r}=\frac{(x+y+z)^{3/2}}{\sqrt{xyz}}\geqslant 3\sqrt{3}$$

$$\Longleftrightarrow (x+y+z)^3\geqslant 27xyz.$$

最后这个不等式由 $A_3\geqslant G_3$ 即得.

例 12 设 $a+b<3c$，求 证：$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}<\frac{1}{2}$.

证 作变换(1)—(3)，则所设条件成为 $y+z+z+x>3(x+y)$，即 $z<x+y$. 而原不等式等价于

$$\frac{r}{x}\cdot\frac{r}{y}=\frac{1}{xy}\cdot\frac{xyz}{x+y+z}=\frac{z}{x+y+z}<\frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow z<x+y.$$

故原不等式得证.

例13 求证：$b^2c(b-c)+c^2a(c-a)+a^2b(a-b)\geqslant 0$. (IMO24-6.)

证 作代换(1)—(3)，得等价不等式

$$(z+x)^2(x+y)(z-y)+(x+y)^2(y+z)(x-z)$$
$$+(y+z)^2(z+x)(y-x)\geqslant 0,$$

展开并化简得

$$xy^3+yz^3+zx^3-x^2yz-xy^2z-xyz^2\geqslant 0,$$

即 $$xyz\left(\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{x^2}{y}-x-y-z\right)\geqslant 0,$$

因 $x,y,z\in R^+$，这个不等式等价于

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geqslant x+y+z. \qquad (4)$$

最后这个不等式已在第13讲例4中证过($n=3$)，也可用柯西不等式直接证明如下：

$$(x+y+z)^2=\left(\sqrt{y}\cdot\frac{x}{\sqrt{y}}+\sqrt{z}\cdot\frac{y}{\sqrt{z}}+\sqrt{x}\cdot\frac{z}{\sqrt{x}}\right)^2$$
$$\leqslant (y+z+x)\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right).$$

故(4)成立。

习 题 17

1. 设 a,b,c 是一个三角形的三边. 求证：$a'=\sqrt{b^2+c^2}$, $b'=\sqrt{c^2+a^2}$, $c'=\sqrt{a^2+b^2}$ 也是一个三角形的三边.

2. 在$\triangle ABC$中，求证：

   (1) 若$h_a=12$, $h_b=20$, 则$h_c<30$;

   (2) $\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}\geqslant\frac{27}{\pi^2}$($A,B,C$用弧度单位)；

   (3) $\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\leqslant 1+\frac{R}{r}$($\triangle ABC$是锐角三角形)；

   (4) $t_a+t_b+t_c\leqslant\sqrt{3}\,p$;

   (5) $a^4+b^4+c^4\geqslant 16\triangle^2+(a-b)^4+(b-c)^4+(c-a)^4$;

   (6) $\frac{Aa+Bb+Cc}{a+b+c}\geqslant\frac{\pi}{3}\geqslant\frac{A\cos A+B\cos B+C\cos C}{\cos A+\cos B+\cos C}$;

   (7) 若t_a, t_b, t_c都小于1，则$\triangle<\frac{1}{\sqrt{3}}$;

   (8) $\mathrm{ctg}^3\frac{A}{2}+\mathrm{ctg}^3\frac{B}{2}+\mathrm{ctg}^3\frac{C}{2}\geqslant 9\sqrt{3}$;

   (9) $\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2}\geqslant\frac{1}{r^2}$.

3. 设四边形 $ABCD$ 的面积为 S, O为形内一点，求证：$2S=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2\Longleftrightarrow ABCD$是正方形，且$O$是中心.

4. 将正方形分割成许多矩形，求证：所有这些矩形的外接圆面积之和不小于原正方形外接圆的面积.

5. 有大小两个矩形纸片$ABCD$和$AB'C'D'$固定如图17-2，设$AB=a$, $AD=b$, $AB'=\lambda a$, $AD'=\mu b$. P, Q是小矩形内任意两点，R是大矩形内任一点. 求证：$S_{PQR}\leqslant\frac{1}{2}ab(\lambda+\mu-\lambda\mu)$.

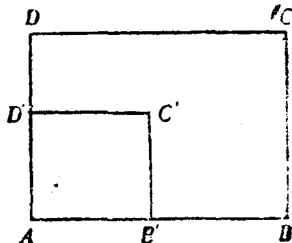


图 17-2

第18讲　最值问题的解法（一）

严 镇 军

人们常遇到各种(几何的、物理的及工程的等)求最大值和最小值问题，这类问题在许多情况下归结为求函数的最值．寻求函数的最值，是研究函数性质、作图及不等式的重要手段，因而最值问题是中学数学的重要课题．解决函数的最值问题涉及的知识面较广，解法多种多样，这里讲一些求最值的初等方法，不涉及微积分．

为了方便，用f_{max}及f_{min}分别表示函数的最大值和最小值．

一、配方法

对于涉及到二次函数的最值问题，常用配方法求解．

例 1　(选择题)已知x_1, x_2是方程$x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0(k\in R)$的两个实数根，则$x_1^2+x_2^2$的最大值是

(A) 19；　(B) 18；　(C) $5\frac{5}{9}$；　(D) 不存在．

(1982年全国高中数学联赛试题．)

解　由于所给二次方程有实数根，故判别式

$$\Delta=[-(k-2)]^2-4\times1\cdot(k^2+3k+5)\geqslant0,$$

即　$$3k^2+16k+16\leqslant0.$$

解得　$$-4\leqslant k\leqslant-\frac{4}{3}.$$

由韦达定理，$x_1+x_2=k-2, x_1x_2=k^2+3k+5$，所以

$$f(k)=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$
$$=-k^2-10k-6=-(k+5)^2+19. \qquad (1)$$

由于$f(k)$在$\left[-4,-\frac{4}{3}\right]$上是减函数，可见当$k=-4$时，

$(x_1^2+x_2^2)_{max}=18$. 故应选(B).

注 求函数的最值时，必须充分地注意到函数的定义域. 例如，本题如不先断定$k\in\left[-4,\ -\frac{3}{4}\right]$，而只由韦达定理求得(1)式，就可能误选$(A)$，即认为$(x_1^2+x_2^2)_{max}=19$.

有时，一个复杂的函数式，能改写成二次函数型的复合函数，即

$$f(x)=ag^2(x)+bg(x)+c$$

$(a,b,c$是常数$)$，也可以用配方法求其最值.

例 2 求$f(x)=2^{x+2}-3\cdot4^x$在区间$[-1,\ 0]$内的最大值和最小值.

解 配方得

$$f(x)=2^{x+2}-3\cdot4^x=-3(2^x)^2+4\cdot2^x$$
$$=-3\left(2^x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}.$$

因$-1\leqslant x\leqslant0$，故$\frac{1}{2}\leqslant2^x\leqslant1$. 从而，当$2^x=\frac{2}{3}$（即$x=\log_2\frac{2}{3}$）时，$f(x)$取最大值$f_{max}=\frac{4}{3}$. 易知在$[-1,\log_2\frac{2}{3}]$及$[\log_2\frac{2}{3},0]$内$f(x)$是单调减少的，从而$f_{min}$只可能在端点$x=-1$或0处取得. 由于$f(-1)=\frac{5}{4}>f(0)=1$，故$f_{min}=f(0)=1$.

例3 求函数$y=5\sin x+\cos2x$的最值.

解 令$t=\sin x$，则$-1\leqslant t\leqslant1$. 把原式配方得

$$y(t)=5t+(1-2t^2)=-2\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{33}{8}.$$

由于t不可能为$\frac{5}{4}$，由此断定$y_{max}=\frac{33}{8}$是错误的.

因为$y(t)$在$[-1,1]$上是增函数，故当$t=1$，即$x=2n\pi+\frac{\pi}{2}(n\in Z)$时，$y_{max}=-2\left(1-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{33}{8}=4$；当$t=-1$，$x=2n\pi-\frac{\pi}{2}$

$(n\in Z)$时，$y_{\min}=-2\left(-1-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{33}{8}=-6$.

二、判别式法

对于某些特殊形式的函数的最值问题，如果经适当的代数变形，使目标函数 y(即要求最值的函数)出现在一个有实根的一元二次方程中的系数之中，这时此方程的判别式不能为负，从而可通过解不等式$\varDelta\geqslant0$来求得y的最值.

例4 求函数 $y=\dfrac{2x}{x^2+x+1}$的最值.

解 将原式变形为

$$yx^2+(y-2)x+y=0. \tag{2}$$

因 x 是实数，故判别式

$$\varDelta=(y-2)^2-4y^2\geqslant0,$$

解得$-2\leqslant y\leqslant\frac{2}{3}$.

将 $y=-2$ 代入(2)，解得 $x=-1$，代入原式得 $y_{\min}=y(-1)=-2$；将 $y=\frac{2}{3}$代入(2)，解得 $x=1$，代入原式得$y_{\max}=y(1)=\frac{2}{3}$.

注 用判别式法求函数的最值时，应注意 $\varDelta\geqslant0$是表示$\varDelta>0$或$\varDelta=0$，并非要求两者同时成立，因此在利用判别式$\varDelta\geqslant0$求出 y 的范围后，如求得 $a\leqslant y\leqslant b$ 后，不能随意断定 $y_{\min}=a$，$y_{\max}=b$. 还必须求出与 a，b 对应的x值，并将其代入原来的函数式进行检验. 只有当x，y 的对应值存在，而且满足原来的函数式时，才能确定为原来函数的最值，否则就可能导致错误.

例5 求函数 $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}$的最值.

解 原式移项、两边平方并整理后得

$$8x^2-16yx+3-16y^2=0. \tag{3}$$

因 x 是实数，故判别式

$$\varDelta=(16y)^2-4\times8(3-16y^2)\geqslant0,$$

即$8y^2-1\geqslant 0$，解得

$$y\geqslant\frac{\sqrt{2}}{4}\text{或}y\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{因}\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1+4x^2}>-\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2|x|$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}|x|-\frac{1}{2}x\geqslant 0,$$

故$y\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{4}$是不可能的.

将$y=\frac{\sqrt{2}}{4}$代入(3)，解得$x=\frac{\sqrt{2}}{4}$. 代入原式得$y_{min}=y\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$，显然$y_{max}$不存在.

注 由于在去根式的过程中，所使用的代数运算(两边平方)不是可逆的，这才导致不可能的结果：$y\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{4}$. 也就是说，由$\Delta\geqslant 0$解得的$y$扩大了原来函数的值域，如果随意地由$y\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{4}$，断定$y_{max}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，就出现了前面指出过的错误.

例6 求函数$y=\frac{\sec^2x-\mathrm{tg}x}{\sec^2x+\mathrm{tg}x}$的最值.

解 将原式变形为

$$(y-1)\mathrm{tg}^2x+(y+1)\mathrm{tg}x+(y-1)=0. \qquad (4)$$

当$y=1$时，由(4)得$\mathrm{tg}x=0$，$x=n\pi(x\in Z)$；当$y\neq 1$时，(4)是一个关于$\mathrm{tg}x$的二次方程，由于$\mathrm{tg}x$是实数，故

$$\Delta=(y+1)^2-4(y-1)^2\geqslant 0,$$

即$(3y-1)(y-3)\leqslant 0$，解得$\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 3$（注意$y=1$满足这个不等式）.

将$y=3$代入(4)，解得$\mathrm{tg}x=-1$，$x=n\pi-\frac{\pi}{4}(n\in Z)$，即

$y_{max} = y\left(n\pi - \frac{\pi}{4}\right) = 3$；将 $y = \frac{1}{3}$ 代入(4)解得 $\mathrm{tg}x = 1$，$x = n\pi + \frac{\pi}{4}(n \in Z)$，即 $y_{min} = y\left(n\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$.

三、消去法

在一定的条件等式（例如 $g(x, y) = 0$）下，求多元函数（例如二元函数 $f(x,y)$）的最值时，较常用的办法是利用条件式消去一些自变量，使问题转化为求在给定区间上的一元函数的最值问题.

例 7 若 x，$y \in R$，且 $3x^2 + 2y^2 - 6x = 0$，求 $(x^2 + y^2)_{max}$.

解 由条件式得 $2y^2 = 3(2x - x^2)$，因 $y^2 \geqslant 0$，故 $2x - x^2 \geqslant 0$，解得 $0 \leqslant x \leqslant 2$. 又 $x^2 + y^2 = x^2 + \frac{3}{2}(2x - x^2) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}(x - 3)^2$，于是当 $x = 2$ 时（相应地 $y = 0$），$(x^2 + y^2)_{max} = 4$.

例 8 设 x, y, z 是非负实数，且满足方程

$$4^{\sqrt{5x+9y+4z}} - 68 \times 2^{\sqrt{5x+9y+4z}} + 256 = 0, \tag{5}$$

求 $x + y + z$ 的最大值和最小值的乘积.（1986 年全国高中数学联赛试题.）

解 令 $u = \sqrt{5x + 9y + 4z}$，则(5)成为

$$(2^u)^2 - 68 \times 2^u + 256 = 0,$$

即 $(2^u - 64)(2^u - 4) = 0$，所以 $u = 6$，或 $u = 2$.

若 $u = 6$，即 $5x + 9y + 4z = 36$，$z = \frac{1}{4}(36 - 5x - 9y)$，从而

$$x + y + z = 9 - \frac{1}{4}(x + 5y) \leqslant 9,$$

且当 $x = 0$，$y = 0$，$z = 9$ 时取等号，即 $(x + y + z)_{max} = 9$，

若 $u = 2$，即 $5x + 9y + 4z = 4$，从而

$$x + y + z = \frac{4}{9} + \frac{1}{9}(4x + 5z) \geqslant \frac{4}{9},$$

且当 $x=z=0, y=\frac{4}{9}$ 时取等号，即 $(x+y+z)_{\min}=\frac{4}{9}$。

所以 $(x+y+z)_{\max}\cdot(x+y+z)_{\min}=4$.

例 9 过点 $B(0, -b)$ 作椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的弦，求这些弦的最大长度.

解 设 $M(x, y)$ 是椭圆上任一点，因 B 点在椭圆上，故连 B,M 所得弦长为 BM，且

$$BM^2=x^2+(y+b)^2=x^2+y^2+2by+b^2. \qquad (6)$$

由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $x^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2$，代入(6)得

$$BM^2=\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)y^2+2by+(a^2+b^2)=-\frac{c^2}{b^2}\left(y-\frac{b^3}{c^2}\right)^2+\frac{a^4}{c^2},$$

式中 $c^2=a^2-b^2$. 由于在椭圆上 y 的取值范围是 $-b\leqslant y\leqslant b$，这就可能有两种情况：

(1) 若 $\frac{b^3}{c^2}\leqslant b$，即 $b^2\leqslant c^2=a^2-b^2$，或 $\sqrt{2}b\leqslant a$ 时，

当 $y=\frac{b^3}{c^2}$ 时，$(BM^2)_{\max}=\frac{a^4}{c^2}$，从而 $(BM)_{\max}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

(2) 若 $\frac{b^3}{c^2}<b$，即 $\sqrt{2}b>a$ 时，当 $y=b$ 时，

$$(BM)^2_{\max}=-\frac{c^2}{b^2}\left(b-\frac{b^3}{c^2}\right)^2+\frac{a^4}{c^2}=4b^2,$$

所以 $(BM)_{\max}=2b$.

四、三角函数法

如果目标函数经变形后能化成

$$y=A\sin(x+\theta)+B(\text{或} y=A\cos(x+\theta)+B)$$

的形式，式中 A,B 为常数，则由 $|\sin x|\leqslant1$（或 $|\cos x|\leqslant1$）可知，当 $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}-\theta(n\in Z)$ 时，$y_{\max}=A+B$（设 $A>0$）；当

$x=2n\pi-\frac{\pi}{2}-\theta$时，$y_{\min}=-A+B$.

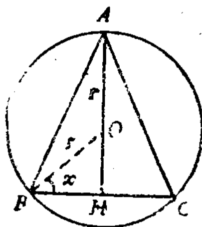


图 18-1

例 10 在已知圆内作内接等腰三角形，使这三角形的底与其底上的高之和最大.

解 如图 18-1，设已知$\odot O$的半径为r，$\triangle ABC$是$\odot O$的内接等腰三角形，AH是底边BC上的高，则$OA=OB=r$. 令$\angle OBH=x$，则

$$AH+BC=r+r\sin x+2r\cos x$$
$$=r+\sqrt{5}\,r\sin(x+\theta)\quad(\theta=\mathrm{arctg}2).$$

当$x=\frac{\pi}{2}-\theta$时，$(AH+BC)_{\max}=r(1+\sqrt{5})$. 由于$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\mathrm{ctg}\theta=\frac{1}{2}$，所以此时

$$BC=2r\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{5}}r=\frac{4\sqrt{5}}{5}r.$$

这样，就得到如下的作图法：

(1) 以长为r及$2r$的线段为直角边作直角三角形；

(2) 取此直角三角形的斜边长的$\frac{4}{5}$即得BC；

(3) 在$\odot O$上任取弦BC，再以BC为底作$\odot O$的内接等腰三角形，即为所求.

注 对于求最值的应用题，由于用不同的方式选定自变量，得到的目标函数不同，从而求最值的方法也不同. 有时，自变量选择得比较恰当，能较容易求得最值. 如本题令$BC=2x$，则得到的目标函数是

$$AH+BC=2x+r+\sqrt{r^2-x^2},$$

对此可用判别式法求出最值，但不如三角法简单.

例 11 求函数$y=\frac{4\sin x-1}{5\cos x+10}$的最大值及最小值.

解 将原式变形为

$10y+1=4\sin x-5y\cos x=\sqrt{16+25y^2}\sin(x-\theta)$,

式中$\theta=\operatorname{arctg}\frac{5y}{4}$，所以$|10y+1|\leqslant\sqrt{16+25y^2}$，两边平方，得

$$100y^2+20y+1\leqslant 16+25y^2,$$

解得$-\frac{3}{5}\leqslant y\leqslant\frac{1}{3}$.

于是，当$x=2n\pi+\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{5}{12}(n\in Z)$时，$y_{max}=\frac{1}{3}$；当$x=2n\pi-\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$时，$y_{min}=-\frac{3}{5}$.

例 12 函数$F(x)=|\cos^2x+2\sin x\cos x-\sin^2x+Ax+B|$在$0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$上的最大值$M$与参数$A$，$B$有关，问$A$，$B$取什么值时$M$最小.（1983年全国高中数学联赛试题.）

解 作三角恒等变形，有

$$F(x)=\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+Ax+B\right|.$$

从这个式子，凭直觉可猜测到$A=B=0$时M最小，下面证明这个结论.

当$A=B=0$时，$F(x)$成为

$$f(x)=\sqrt{2}\left|\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

在区间$\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]$上有三个点：$x_1=\frac{\pi}{8}$，$x_2=\frac{5\pi}{8}$，$x_3=\frac{9\pi}{8}$使$f(x)$达到最小值$\sqrt{2}$. 下面证明：当$A$，$B$不全为零时，有

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 3\pi/2}F(x)>\sqrt{2}.$$

用反证法. 若$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 3\pi/2}F(x)\leqslant\sqrt{2}$，则由

$$F\left(\frac{\pi}{8}\right)=\left|\sqrt{2}+A\frac{\pi}{8}+B\right|\leqslant\sqrt{2},$$

可得 $$\frac{\pi}{8}A+B\leqslant 0. \tag{1}$$

同样，由$F\left(\frac{5\pi}{8}\right)\leqslant\sqrt{2}$，$F\left(\frac{9\pi}{8}\right)\leqslant\sqrt{2}$，可得

$$\frac{5\pi}{8}A+B\geqslant 0, \tag{2}$$

$$\frac{9\pi}{8}A+B\leqslant 0. \tag{3}$$

分别将(2)式减(1)式，(3)式减(2)式，得$\frac{\pi}{8}A\geqslant 0$及$\frac{\pi}{8}A\leqslant 0$，从而$A=0$．把$A=0$代入(1)，(2)，又可得$B=0$．这与所设矛盾．

综上证得，当$A=B=0$时M最小，这个最小值是$\sqrt{2}$．

习 题 18

1．求函数$f(x,y)=4x^2+4xy+4y^2-4x-14y+18$的最小值．

2．求函数$y=\log_{a^2-a-2}(3+x-2x^2)$的最值．

3．设$x,y\in R$，且$x^2-2xy+y^2-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+6=0$，求函数$u=x+y$的最小值．

4．求$y=\dfrac{4+4\sin 2\theta+\sin^2 2\theta}{4\sin 2\theta}\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$的最小值．

5．求$y=\dfrac{1+2\sin x}{2+\sin x}$的最大值及最小值．

6．设$x,y\in R$，且$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$，求$u=x^2+xy+y^2$的最值．

7．设O为复平面的原点，Z_1和Z_2为复平面内的两个动点，且满足：

(1) Z_1和Z_2所对应的复数z_1和z_2的幅角分别为定值θ和$-\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$；

(2) $\triangle OZ_1Z_2$的面积为定值s．

求$\triangle OZ_1Z_2$的重心所对应的复数模的最小值．（1985年全国高考数学试题．）

第19讲　最值问题的解法（二）

严　镇　军

一、换元法

换元的目的是把复杂的目标函数化为简单的目标函数，从而较容易求得最值．这种方法在前面的一些例题中已用过，下面再举些例子．

例 1　求函数 $y=x-2+\sqrt{4-x^2}$ 的最值．

解　由于 $4-x^2\geqslant 0$，故函数 y 的定义域是 $[-2,2]$．于是可令 $x=2\sin\theta\left(\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\right)$．则

$$y=2\sin\theta-2+\sqrt{4-4\sin^2\theta}=2\sin\theta+2\cos\theta-2$$

$$=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-2.$$

因 $-\frac{\pi}{4}\leqslant\theta+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3}{4}\pi$，所以，当 $\theta=\frac{\pi}{4}$（即 $x=\sqrt{2}$）时，$y_{max}=2\sqrt{2}-2$；当 $\theta=-\frac{\pi}{2}$（即 $x=-2$）时，$y_{min}=-4$．

注　本题可用判别法解，但不如用代换简单．利用三角代换可以消去一些特殊形式的根式．如为消去 $\sqrt{a^2-x^2}\,(a>0)$ 可令 $x=a\sin\theta$（或 $x=a\cos\theta$）；为消去 $\sqrt{x^2-a^2}$ 可令 $x=a\sec\theta$（或 $x=a\csc\theta$）；为消去 $\sqrt{x^2+a^2}$ 可令 $x=a\operatorname{tg}\theta$（或 $x=a\operatorname{ctg}\theta$）等．

例 2　设 $x^2+xy+y^2=19$，求 x^2+y^2 的最值．

解　设 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$（θ 为参数），则

$$x^2+xy+y^2=r^2(\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta)$$

$$=r^2\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)=19.$$

从而 $$x^2+y^2=r^2=\frac{19}{1+\frac{1}{2}\sin 2\theta}.$$

因 $-1\leqslant\sin 2\theta\leqslant 1$，故当 $\sin 2\theta=1\left(即 x=y=\sqrt{\frac{19}{3}}\right)$时，$(x^2+y^2)_{\min}=\frac{38}{3}$；当$\sin 2\theta=-1$（即$x=\sqrt{19}$，$y=-\sqrt{19}$，或$x=-\sqrt{19}$，$y=\sqrt{19}$）时，$(x^2+y^2)_{\max}=38$.

注 本题实际上是在极坐标系下，求原点到椭圆$x^2+xy+y^2=19$上各点的最大及最小距离．一般说来，对于一个条件最值问题，若条件式(等式或不等式)及目标函数都是二元二次的，在极坐标系下求解比较简单．如果条件为$|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$，则可用代换 $x=\cos\alpha$，$y=\sin\beta$.

例3 求$y=\frac{x-x^3}{1+2x^2+x^4}$的最值.

解 令 $x=\operatorname{tg}\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$y=\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2\operatorname{tg}\theta}{2(1+\operatorname{tg}^2\theta)}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}$$
$$=\frac{1}{2}\sin 2\theta\cos 2\theta=\frac{1}{4}\sin 4\theta.$$

因$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$，故$-2\pi<4\theta<4\pi$．所以，当 $\sin 4\theta=1$（如$x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$）时，$y_{\max}=\frac{1}{4}$；当 $\sin 4\theta=-1\left(如 x=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)$时，$y_{\min}=-1$.

二、不等式方法

不等式与函数的最值问题是密切联系着的．由一个最值问题的解，可以得到一个不等式．例如，若$f(x)$在$[a,b]$上的最大值及最小值是 A，B，则有 $$B\leqslant f(x)\leqslant A\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$
反过来，不等式是求最值的重要工具之一．许多不等式可以解释为最值问题的解．例如，算术平均-几何平均不等式$A_n\geqslant G_n$：若

$a_1, a_2, \cdots, a_n \in R^+$，则 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，

等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立，可以解释为两个对偶的最值问题，也称最值定理：

1．设 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的和是常数 A，则当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，这 n 个数的乘积取最大值 $\left(\frac{A}{n}\right)^n$．

2．设 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的乘积为常数 B，则当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\sqrt[n]{B}$ 时，这 n 个数的和取最小值．

特别地，当 $n=3$ 时，又可进一步解释为两个对偶的几何问题：长方体的三条互相垂直的棱长的和 $a+b+c$ 与它的体积 abc 的最大值及最小值问题．又如关于三角形的魏琴伯克不等式 $a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\triangle$（等号当且仅当 $a=b=c$ 时成立），可以解释为两个对偶的几何最值问题：三边长的平方和为定值 l^2 的三角形中，以正三角形面积最大，这个最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{12}l^2$；面积为定值 A 的三角形中，以正三角形三边长的平方和最小，这个最小值是 $4\sqrt{3}A$．

例 4　求函数 $y=x^2(1-3x)$ 在 $[0, \frac{1}{3}]$ 内的最大值．

解　将原函数式变形，有

$$y=x^2(1-3x)=\frac{3}{2}\left[x\cdot x\left(\frac{2}{3}-2x\right)\right]. \quad (1)$$

因 $x\in[0, \frac{1}{3}]$，故 $x\geqslant 0, \frac{2}{3}-2x\geqslant 0$．由 $A_3\geqslant G_3$ 得

$$y\leqslant\frac{3}{2}\left[\frac{x+x+(\frac{2}{3}-2x)}{3}\right]^3=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^3=\frac{4}{243}.$$

等号当且仅当 $x=\frac{2}{3}-2x$ 时成立，即函数在 $x=\frac{2}{9}$（$\in[0, \frac{1}{3}]$）处取得最大值 $y_{max}=\frac{4}{243}$．

注　本题之所以把原函数式变形为(1)，是为了使 3 个因式的和 $x+x+(\frac{2}{3}-2x)=\frac{2}{3}$（定值）．使各因式之和（或积）为定

值，是利用平均不等式求最值的首要点．其次，还要各因式相等能实现，否则也将导致错误．

例5 求$y=\frac{2}{\cos^2\alpha}+\cos^2\alpha\left(\alpha\neq n\pi+\frac{\pi}{2},n\in Z\right)$的最小值．

误解 因$\frac{2}{\cos^2\alpha}$，$\cos^2\alpha>0$，于是由$A_2\geqslant G_2$，得

$$y\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha}=2\sqrt{2},\tag{2}$$

所以 $y_{\min}=2\sqrt{2}$．

在上述误解中，(2)并未错．但(2)中等号成立的条件是$\frac{2}{\cos^2\alpha}=\cos^2\alpha$．因$0<\cos^2\alpha\leqslant 1$，上述等式对任何$\alpha$都不成立．这样，(2)中等号不可能成立，因而不能断定$y_{\min}=2\sqrt{2}$．

解 因$\alpha\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$，故$0<\cos^2\alpha\leqslant 1$，$\frac{1}{\cos^2\alpha}\geqslant 1$，于是，由$A_2\geqslant G_2$，有$y=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}+\cos^2\alpha\right)\geqslant 1+\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}+\cos^2\alpha\right)$

$\geqslant 1+2\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha}=3$．

第一个不等式中等号成立的充要条件是$\cos^2\alpha=1$；第二个不等式中等号成立的充要条件是$\frac{1}{\cos^2\alpha}=\cos^2\alpha$．也就是说，当且仅当$\cos^2\alpha=1$（即$\alpha=n\pi$）时，$y$取最小值$y_{\min}=3$．

例6 制造一个容积为V（定值）的圆柱形容器，试分别就容器有盖及无盖两种情形，求怎样选取底半径及高之比，使用料最省．

解 设底半径及高分别为r及h，则$V=\pi r^2h$，$h=\frac{V}{\pi r^2}$．

(1) 当容器有盖时，所需用料的面积是

$S(r)=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\frac{2V}{r}\ (r>0)$．

于是问题归结为求函数 $S(r)$ 的最小值，由 $A_3 \geqslant G_3$，得

$$S(r)=2\pi r^2+\frac{V}{r}+\frac{V}{r}\geqslant 3\sqrt[3]{2\pi r^2\cdot\frac{V}{r}\cdot\frac{V}{r}}=3\sqrt[3]{2\pi V^2},$$

等号当且仅当 $2\pi r^2=\frac{V}{r}\left(\text{即}r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$时成立，这时$S(r)$取得最小值$3\sqrt[3]{2\pi V^2}$，而且有 $h=\frac{V}{\pi r^2}=2r$.

这说明当$\frac{r}{h}=\frac{1}{2}$时用料最少.

(2) 当容器无盖时，所需用料的面积

$$S(r)=\pi r^2+2\pi rh=\pi r^2+\frac{2V}{r}$$

$$=\pi r^2+\frac{V}{r}+\frac{V}{r}\geqslant 3\sqrt[3]{\pi r^2\cdot\frac{V}{r}\cdot\frac{V}{r}}=3\sqrt[3]{\pi V^2}.$$

等号当且仅当$\pi r^2=\frac{V}{r}\left(\text{即}r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)$时成立，这时$h=\frac{V}{\pi r^2}=r$，即 $r=h$ 时用料最少.

例 7 设$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，求$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$的最小值.

解 由平均不等式 $Q_n\geqslant A_n$，

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geqslant\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{n}=\frac{1}{n},$$

等号当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$时成立. 即

$$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)_{\min}=\frac{1}{n}.$$

例 8 已知a，b，c，d 是满足 $a+b+c+d+e=8$，$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$的实数，试确定 e 的最大值.

解 由题设有$a+b+c+d=8-e$，$a^2+b^2+c^2+d^2=16-e^2$.于是由不等式 $Q_4\geqslant A_4\left(\text{即}\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}\geqslant\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2\right)$，有

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant(a+b+c+d)^2,$$

即 $4(16-e^2)\geqslant(8-e)^2$，或 $e(5e-16)\leqslant 0$. (3)

所以 $0\leqslant e\leqslant\frac{16}{5}$.

以上不等式当且仅当 $a=b=c=d$ 时等号成立. 由此可知 $e_{max}=\frac{16}{5}$，此时 $a=b=c=d=\frac{6}{5}$.

注 (3) 也可由柯西不等式得到.

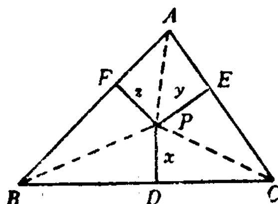


图 19-1

例 9 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，D，E，F 分别为 P 到 BC,CA,AB 各边所引垂线的垂足，求所有使

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

为最小的 P 点.（IMO22-1.）

解 如图 19-1，设 $\triangle ABC$ 的三边 $BC=a,CA=b,AB=c$，面积为 $\triangle$，记 $PD=x,PE=y,PF=z$，则 $ax+by+cz=2\triangle$.

由柯西不等式，得

$$\left[\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c}{z}}\right)^2\right]\cdot$$

$$[(\sqrt{ax})^2+(\sqrt{by})^2+(\sqrt{cz})^2]$$

$$\geqslant\left(\sqrt{\frac{a}{x}}\cdot\sqrt{ax}+\sqrt{\frac{b}{y}}\cdot\sqrt{by}+\sqrt{\frac{c}{z}}\cdot\sqrt{cz}\right)^2$$

$$=(a+b+c)^2.$$

即 $\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)(ax+by+cz)\geqslant(a+b+c)^2$.

所以 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{2\triangle}$,

即 $\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}\geqslant\frac{(a+b+c)}{2\triangle}$,

上式当且仅当$\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{\frac{a}{x}}}=\frac{\sqrt{by}}{\sqrt{\frac{b}{y}}}=\frac{\sqrt{cz}}{\sqrt{\frac{c}{z}}}$

(即 $x=y=z$，亦即 $PD=PE=PF$)时等号成立. 因而使$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$为最小的 P 点是$\triangle ABC$的内心.

三、解析几何的应用

灵活地运用解析几何知识，可以方便地解决一些特殊的最值问题. 首先是这样一类最值问题：当点(x,y)在二次曲线$f(x,y)=0$上变动时，要求函数 $g(x, y)$的最值，常可用 $f(x, y)=0$的参数方程求解.

例 10 设$x,y\in R,3x^2+2y^2=6x$,求 x^2+y^2 的最值.

解 把所给方程改写为 $(x-1)^2+\frac{y^2}{3/2}=1$.

这是一个椭圆，其参数方程为

$$\begin{cases}x=1+\cos t,\\ y=\frac{\sqrt{6}}{2}\sin t\end{cases}\quad (t\text{ 为参数}，0\leqslant t<2\pi).$$

于是 $S(t)=x^2+y^2=(1+\cos t)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\sin t\right)^2$

$$=-\frac{1}{2}(\cos t-2)^2+\frac{9}{2}.$$

因$|\cos t|\leqslant 1$，且$S(t)$随 $\cos t$ 的增加而增加，所以，当$\cos t=-1$,即 $x=y=0$ 时，$(x^2+y^2)_{\min}=0$；当 $\cos t=1$，即 $x=2$，$y=0$时，$(x+y)_{\max}=4$.

利用两点的距离公式及点到直线的距离公式，有时也能顺利地解决某些最值问题.

例 11 求函数$y=\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-4x+13}$的最小值.

解 用配方法把原式改写为

$$y=\sqrt{(x-1)^2+(0-2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(0-3)^2}.$$

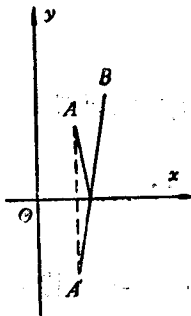


图 19-2

于是，从几何上看，问题是要求一点$P(x,0)$，使P分别到点$A(1,2)$与$B(2,3)$的距离之和最小．由熟知的平面几何方法，取点$A(1,2)$关于x轴的对称点$A'(1,-2)$，则线段$A'B$的长(图19-2)就是所要求的最小值，即

$$y_{\min}=A'B=\sqrt{(1-2)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{26}.$$

在直线$A'B$的方程$y+2=5(x-1)$中，令$y=0$，解得$x=\frac{7}{5}$．这就是使y取最小值的x

利用直线的斜率，也能解一些最值问题

例 12 求函数$y=\frac{1+\sin x}{2+\cos x}$的最值

解 令$k=\frac{1+\sin x}{2+\cos x}$，

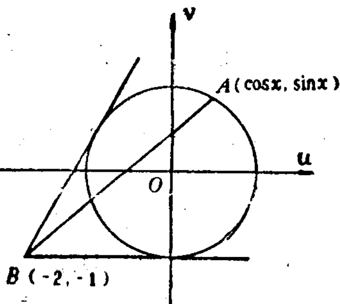


图 19-3

则k可以看成坐标平面$o\text{-}uv$内过点$A(\cos x, \sin x)$及点$B(-2,-1)$的直线的斜率(图19-3)，由于A在圆$u^2+v^2=1$上运动，可见，当直线BA是此圆的切线时，斜率k取得最值．设过B点的切线方程为$v+1=k(u+2)$，则

$$\frac{|2k-1|}{\sqrt{1+k^2}}=1,\ 即(2k-1)^2=1+k^2.$$

解得$k_1=0, k_2=\frac{4}{3}$．所以$y_{\min}=0$，$y_{\max}=\frac{4}{3}$．

取得最小值和最大值的 x 值，读者不难自己算出.

下面讲一种在实际应用中非常重要的最值问题——线性最值问题. 这种问题是在一些约束条件下，求多元一次函数的最值，题中的约束条件通常是一组等式或不等式.

例 13 （选择题）边长为 5 的菱形，它的一条对角线长不大于6，另一条不小于6. 则这个菱形两条对角线长之和的最大值是

（A）$10\sqrt{2}$；　（B）14；　（C）$5\sqrt{6}$；　（D）12.

（1987年全国高中数学联赛试题.）

解 设菱形的两条对角线长分别为 x，y，因平行四边形的两对角线长的平方和等于四边长的平方和，于是，问题归结为在约束条件组

$$\begin{cases} x^2+y^2=4\times5^2=100, \\ x\geqslant6,\ 0<y\leqslant6 \end{cases}$$

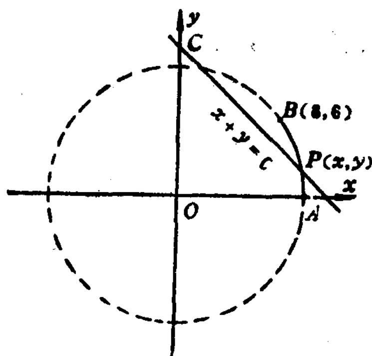


图 19-4

下，求二元函数 $z=x+y$ 的最大值. 这是一个简单的规划问题，满足约束条件组的坐标平面上的点 $P(x,\ y)$ 的全体是一段圆弧 $\overset{\frown}{AB}$（图19-4 中的实线弧，不包括端点 $A(10,0)$，但包括端点 $B(8,6)$）. 考虑与 $\overset{\frown}{AB}$ 相交于点 $P(x,\ y)$ 的一族平行直线 $x+y=c$（c为参数），c是此直线在 y 轴上的截距. 在每条直线上的点，目标函数取相同的值（因而称它为目标函数 $x+y$ 的"等值线"），当交点 P沿 $\overset{\frown}{AB}$ 从 A 运动到 B 的过程中，直线 $x+y=c$ 沿其垂直方向向上平移，因而截距 c 增大. 由此可见，当直线 $x+y=c$ 过 $B(8,\ 6)$ 点时，c 有最大值 $8+6=14$. 即 $(x+y)_{max}=14$.

例 14 设 x, y, z 满足约束条件组

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2, 3y+z\geqslant 2. \end{cases} \tag{4}$$

求三元一次函数 $F=2x+6y+4z$ 的最值.

解 由 $x+y+z=1$，有 $z=1-x-y$，从而

$$F=2y-2x+4.$$

而不等式组(4)成为

$$\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0\leqslant y\leqslant 2, \\ 2y-x\geqslant 1. \end{cases}$$

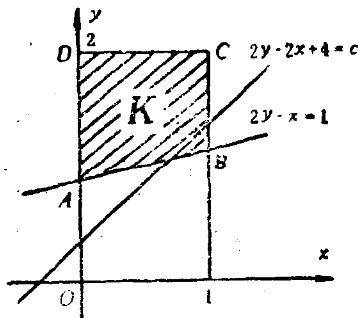


图 19 5

由这三个不等式所确定的平面区域（即满足这三个不等式的点(x,y)的全体)是由 4 条直线$x=0$, $x=1$, $2y-x=1$ 及 $y=2$所围成的矩形区域K(图19-5 中的阴影部分，包括边界及其内部)，此梯形的顶点为$A(0,\frac{1}{2})$，$B(1,1)$，$C(1,2)$及$D(0,2)$. 考虑与区域K相交的平行直线族 $2y-2x+4=c$，即 $y=x+2+\frac{c}{2}$，在每条直线上的每点，目标函数取相同的值. 当直线沿其垂直方向向上平移时，它在 y 轴上的截距 $2+\frac{c}{2}$增加，因而 c 增加. 易知当直线 $2y-2x+4=c$ 过点 $D(0,2)$时，c 值最大，这时 $c=2\times 2-2\times 0+4=8$，即 $F_{\max}=8$；当直线过点 $B(1,1)$时，c 值最小，这时 $c=2\times 1-2\times 1+4=4$，即 $F_{\min}=4$.

注 上面两例所用的方法称为等值线方法. 对于一个线性最值问题，如果经消元后，能归结为在由 x, y 的不等式组构成的约束条件下，求二元一次函数 $F=ax+by+d$ (a, b, d 为常数)的最值，而且由约束条件所确定的点 $P(x,y)$ 的全体是一个平面区域 K，则 F 的最值一定在区域 K 的边界上取到. 特别当 K是

一个多边形所围成的区域(包括边界多边形)时,F的最值必在多边形的某顶点上取到. 这个顶点可利用平行直线族$ax+by+d=c$(c为参数)找到. 另一个办法是,算出F在各顶点的值,再通过比较找到最大值和最小值.

习 题 19

1. 求 $y=4\sqrt{5x+6}+\frac{1}{(5x+6)^2}$ 的最小值.

2. 求函数 $y=\sin^2\theta\cos\theta(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2})$的最大值.

3. 设 $x,y,z\geqslant 0,x+y+z=a$.

   (1) 求$(xy+yz+zx)_{max}$;

   (2) 求$(x^m y^n z^p)_{max}(m,n,p\in N)$.

4. 设正$\triangle ABC$的边长为a, 边BC,CA,AB上的点P,Q,R在满足$BP+CQ+AR=a$的条件下移动, 求P,Q,R位于何处时, $\triangle PQR$的面积最大.

5. 证明:周长为定值的四边形中,以正方形面积最大.

6. 若$x,y\in R$, $x^2+y^2\leqslant 1$,求$|2x^2-3xy-2y^2|_{max}$.

7. 若$|p|\leqslant 1$, $|q|\leqslant 1$,求$(pq+\sqrt{(1-p^2)(1-q^2)})_{max}$.

8. 设$x,y\in R,x^2-6x+y^2-6y=18$, 求$\left(\frac{y}{x}\right)_{max}$.

9. 某工厂每天要生产甲、乙两种产品. 按工艺规定, 每件甲产品需分别在A,B,C,D四台不同的设备上加工2,1,4,0小时; 每件乙产品需分别在A,B,C,D上加工2,2,0,4小时. 已知A,B,C,D每天最多能转动的时数分别是12,8,16,12小时. 生产一件甲产品该厂得利润200元, 生产一件乙产品得利润300元. 问每天如何安排生产才能得到利润最多?

第20讲　凸包概念在平面几何解题中的应用

杜 锡 录

前面讨论的主要是经典的平面几何．现代数学的发展又给平面几何注入了新的内容，这就是将组合数学的思想和方法与传统的平面几何结合在一起，称之为组合几何的一个分支．其中一个主要问题是讨论以几何元素为元素的集合的结构及其性质．其中一个重要的工具就是凸包．下面就先从凸包谈起．

定义 1　如果对于点集 M 中的任意两点 A，B．线段 AB 上的每一点都属于点集 M，那么 M 就称为凸集．

显然线段、直线、射线、带形以及整个平面都是凸集，空集 ϕ，一个点的集也定义为凸集．

例 1　证明圆是凸集．

证　如图 20-1，设圆心为 O，半径为 r，如果 A，B 两点属于圆 O，那么 $OA\leqslant r, OB\leqslant r$．

设 C 是线段 AB 上的任一点，显然 $\angle OCA$ 和 $\angle OCB$ 中必有一个不小于直角，不妨设 $\angle OCB\geqslant 90°$．则在 $\triangle OCB$ 中，$OC\leqslant OB\leqslant r$，即 $C\in\odot O$，所以圆是凸集．

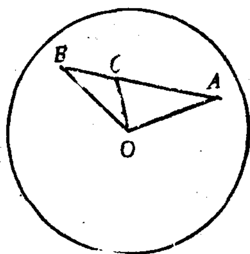


图 20-1

一条直线 l 将平面分为两个部分，在直线 l 的同一侧的点组成的集合称为开半平面，分别记为 α 与 β，$\alpha\cup l$ 称为闭半平面，开半平面与闭半平面显然也都是凸集．

注意到 $\alpha\cup\beta$ 不是凸集，即两个凸集的并不一定是凸集．对

两个凸集的交有下面的结论.

命题 1 两个凸集的交一定是凸集.

证 设 M_1, M_2 是凸集，如果 $M_1 \cap M_2 = \phi$，由于 ϕ 是凸集，即交是凸集.

设 $A, B \in M_1 \cap M_2 = M$，则 $A, B \in M_1$，所以必有线段 $AB \subseteq M_1$. 同理线段 $AB \subseteq M_2$，即 $AB \subseteq M$. 所以 $M = M_1 \cap M_2$ 是凸集.

显然有下面的命题：

命题 2 任意多个凸集的交仍是凸集.

对于每一个平面点集 M，都有包含它的凸集(例如全平面).

定义 2 所有包含点集 M 的凸集的交仍然是凸集，并且是包含 M 的最小凸集，我们称它为点集 M 的凸包，记为 $\overline{M}$.

通常一个有限点集的凸包为一个凸多边形或一条线段.

例如 M 是由四个点 A_1，A_2，A_3，A_4 组成的集合，这时有如图20-2的三种情况：

(1) $\overline{M}$ 是凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$；

(2) $\overline{M}$ 是一个三角形，比如是 $\triangle A_1A_2A_3$；

(3) $\overline{M}$ 是一条线段，比如是线段 A_1A_2；

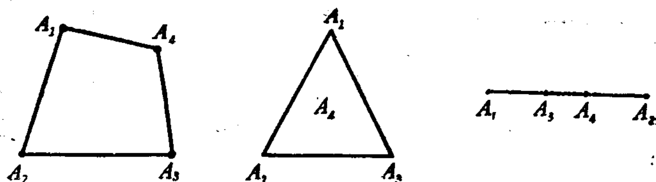


图 20-2

无穷点集的凸包比较复杂，如两个半平面的凸包可能是一个半平面，也可能是整个平面. 再如两个相离的圆组成的集合 M，则凸包 $\overline{M}$ 为图 20-3 所示的阴影部分，其中 AB，CD 是两个圆的外公切线.

凸包的应用十分广泛，我们先看下面的几个例题.

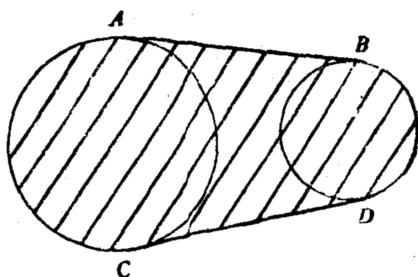


图 20-3

例 2 平面上任意给定 5 个点，其中任三点不共线，则可选出四个点，这四点能构成一个凸四边形的顶点.

证 设这 5 点为 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5. 考虑这 5 点的凸包，有以下三种情况：

(1) 凸包为凸五边形，则其中任意 4 点可构成凸四边形.

(2) 凸包为凸四边形，比如是凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$，则此 4 点即为所求.

(3) 凸包为三角形，设 A_4，A_5 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 之中(如图20-4)，则直线 A_4A_5 只能与三角形的两条边相交(注意，三角形的边是指线段 A_1A_2，A_2A_3，A_3A_1)，比如与边 A_1A_2，A_1A_3 相交，则 $A_2A_3A_5A_4$ 为凸四边形.

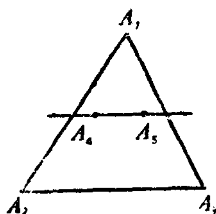


图 20 4

此题看似简单，但不用凸包是很难描述清楚的.

例 3 平面上任意给定 5 点，其中任三点不共线，则在以它们为顶点的三角形中，至多有 7 个锐角三角形.

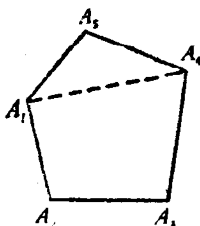
证 我们证明其等价命题：至少有 3 个非锐角三角形.

设这 5 点为 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，考虑其凸包.

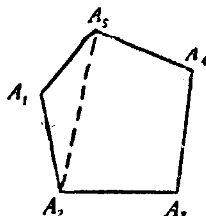
(1) 凸包为五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，则至少有两个内角为非锐角. 不妨设：

①A_1，A_4 为两不相邻的内角，均为非锐角(如图20-5-(1)).

连 A_1A_4，则在四边形 $A_1A_2A_3A_4$中至少有一个非锐角的内角，可组成一个非锐角三角形. 加上 $\triangle A_1A_2A_5$与$\triangle A_3A_4A_5$，所以至少有 3 个非锐角三角形.



(1)



(2)

图 20-5

②A_1,A_2为两相邻的内角，均为非锐角(如图20-5-(2)).

连A_2A_5，在四边形 $A_2A_3A_4A_5$ 中，至少有一个内角为非锐角，即至少有一个非锐角三角形，连同非锐角三角形 $A_1A_2A_5$ 与三角形 $A_1A_2A_3$，所以至少有三个非锐角三角形.

(2) 凸包为四边形. 设 A_5 在四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 之中，并不妨设 A_5 在$\triangle A_1A_2A_3$之中(如图20-6).

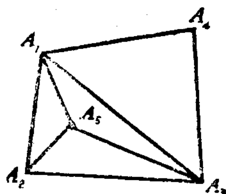


图 20-6

在四边形 $A_1A_2A_3A_4$中，至少有一个内角为非锐角，即至少有一个非锐角三角形，而$\triangle A_1A_2A_5$，$\triangle A_2A_3A_5$，$\triangle A_3A_1A_5$中至少有两个是非锐角三角形，所以至少有三个非锐角三角形.

(3) 凸包为三角形. 设 A_4，A_5 在$\triangle A_1A_2A_3$ 之中，则在 $\triangle A_1A_2A_4$，$\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_1A_4$ 中至少有两个非锐角三角形，而在$\triangle A_1A_2A_5$，$\triangle A_2A_3A_5$，$\triangle A_3A_1A_5$中也至少有两个非锐角三角形，所以在这种情况下，至少有四个非锐角三角形.

综合以上三种情况，命题得证.

下面的一类问题是近来的热门问题，属于 Heilbron 型问题，曾多次出现在数学竞赛之中.

例 4 设平面上任给 n 个点，每两点之间有一个距离，最大距离与最小距离的比记为 λ_n，求 λ_n 的最小值(下确界).

对这个问题的研究还不太深入，现在已经知道的 λ_n 的下界有：$\lambda_4 \geqslant \sqrt{2}$，$\lambda_5 \geqslant 2\sin 54°$，$\lambda_6 \geqslant \sqrt{3}$. 至于 λ_7 尚属未知. 人们有一个猜想：$\lambda_n \geqslant 2\sin\frac{n-2}{2n}\pi$，但还没有证明. 下面我们仅考虑 λ_5，此题是 1985 年全国联赛试题：

命题 平面上任给 5 个相异的点，它们之间的最大距离与最小距离之比记为 λ_5. 求证：$\lambda_5 \geqslant 2\sin 54°$，并讨论等号成立的充要条件.

证 设所给 5 点为 A,B,C,D,E，讨论其凸包.

(1) 其中有三点共线，设此三点为 A，B，C，且 B 在 A，C 之间，则 $\lambda_5 \geqslant \frac{|AC|}{\min(|AB|,\ |BC|)} \geqslant 2 > 2\sin 54°$.

(2) 凸包为三角形. 设 D,E 在 $\triangle ABC$ 的内部，则 $\angle ADB$，$\angle BDC$，$\angle CDA$ 中至少有一个不小于 120°，不妨设 $\angle ABD \geqslant 120°$，则

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD\cdot BD\cos\angle ADB$$
$$\geqslant AD^2 + BD^2 + 2AD\cdot BD\cos 60°.$$

设 $AD \leqslant BD$，得 $AB^2 \geqslant 2AD^2(1+\cos 60°) = 4AD^2\cos^2 30° > 4AD^2\sin 54°$，所以 $\lambda_5 \geqslant \frac{AB}{AD} > 2\sin 54°$.

(3) 凸包为四边形，设 E 在凸四边形 $ABCD$ 的内部，则 E 点必在 $\triangle ABC$ 或 $\triangle ACD$ 之中，可依以上的证明得 $\lambda_5 > 2\sin 54°$.

(4) 凸包为五边形 $ABCDE$，5 个内角中至少有一个不小于 108°，设为 B，则有

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos B$$
$$\geqslant AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos 108°. \qquad (\text{I})$$

设 $AB \leqslant BC$，则

$$AC^2 \geqslant 2AB^2(1-\cos 108°) = 4AB^2\sin^2 54°, \qquad (\text{II})$$

于是有
$$\lambda_5 \geqslant \frac{AC}{AB} \geqslant 2\sin^2 54°.$$

下面我们讨论等式 $\lambda_5 = 2\sin 54°$ 的充分必要条件. 由于在情况

(1)，(2)，(3)中等式不可能成立，所以只讨论情况(4). 在不等式(Ⅰ)中，若等式成立，当且仅当$B=108°$，故任一内角都不能大于108°，这样必有$A=B=C=D=E=108°$.在不等式(Ⅱ)中，若等式成立，当且仅当$AB=BC$，故凸五边形的5条边必相等，所以得到$\lambda_5=2\sin 54°$的充分必要条件是所给点构成一个正5边形.

对于给定的n点组，如果每三点都可构成一个三角形，即任三点不共线，对这些三角形的面积进行相应的讨论，可以得到类似于例4的问题.

例5 平面上任意给定n个点，其中任三点可组成一个三角形，每个三角形都有一个面积，令最大面积与最小面积的比为μ_n，求μ_n的最小值(下确界).

整个问题还没有深入地研究，中国科学技术大学学生李文志得到以下的结果：$\mu_4\geqslant 1$；$\mu_5\geqslant\frac{\sqrt{5}+1}{2}$；$\mu_6\geqslant 3$. 至于7点以上，这个问题还没有任何结果.

下面我们证明$\mu_5\geqslant\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

设其5点为A_1,A_2,A_3,A_4,A_5.

(1) 其凸包如果不是凸五边形，必有一点落在某一三角形之中，不妨设A_4在$\triangle A_1A_2A_3$之中，则有

$$\mu_5\geqslant\frac{\triangle A_1A_2A_3}{\min(\triangle A_1A_2A_4,\triangle A_2A_3A_4,\triangle A_3A_1A_4)}$$

$$\geqslant 3>\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

(2) 设其凸包为凸五边形$A_1A_2A_3A_4A_5$.

作直线$MN\parallel A_3A_4$，交A_1A_3与A_1A_4为M和N，且

$$\frac{A_1M}{MA_3}=\frac{A_1N}{NA_4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

①如图20-7，如果两点A_2，A_5中有一个点与A_3，A_4

在MN的同侧，则有

$$\mu_5 \geqslant \frac{\triangle A_1A_3A_4}{\triangle A_2A_3A_4} \geqslant \frac{A_1A_3}{MA_3}$$

$$= 1 + \frac{A_1M}{MA_3} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

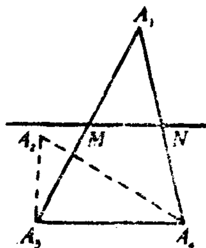


图 20-7

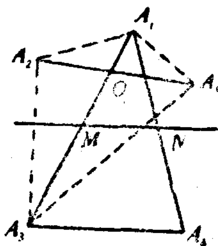


图 20-8

②如图20-8，如果A_2，A_5与A_1均在直线MN的同一侧，设A_2A_5交A_1A_3于O，则$A_1O \leqslant A_1M$ 于是

$$\mu_5 \geqslant \frac{\triangle A_2A_3A_5}{\triangle A_1A_2A_5} = \frac{\triangle A_2A_3O}{\triangle A_1A_2O} = \frac{OA_3}{A_1O}$$

$$\geqslant \frac{MA_3}{A_1M} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

习 题 20

1．设A，B为平面上的两个有限点集，无公共元素，并且$A \cup B$中任意三个不同的点不共线．如果A，B中至少有一个集的点数不小于5，证明存在一个三角形，它的顶点全在A中或全在B中，它的内部不含另一个集中的点．

2．证明$\lambda_6 \geqslant \sqrt{3}$．

3．平面上有4个圆，如果每三个圆都有公共点．证明这4个圆必有公共点．

第21讲 解析几何中的平面几何

杜锡录

解析几何是中学课程中的一项重要内容，它的优点在于使数形结合，把几何问题化作代数式子来演算，或者反过来，用几何的方法去处理数、式．本文将简要地谈谈这两个方面的问题．

一、用解析法证平面几何题

读者应当有这样的体会，即很多平面几何题的纯几何证法往往是非常困难的，甚至于无从下手．然而解析几何却是处理某些这类问题的有力工具．这就是所谓的"解析法"．或许在一些人的心目中，解析法和繁琐杂乱是同义词，这种看法是不公正的．实际上，用解析法来处理平面几何问题，是别具特色与技巧的，并且有一定的章程可以遵循，因此是值得重视的．下面，我们通过例题简要地介绍解析法中应当注意到的几个观念和技巧．

例 1 证明：任意四边形四条边的平方和，等于两条对角线的平方和，再加上对角线中点连线的平方的 4 倍．

证 在直角坐标系中，设四边形四个顶点的坐标为$A_1(x_1, y_1)$，$A_2(x_2, y_2)$，$A_3(x_3, y_3)$，$A_4(x_4, y_4)$，这样由中点公式得出对角线中点的坐标为$B\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right)$，$C\left(\frac{x_2+x_4}{2}, \frac{y_2+y_4}{2}\right)$．我们有等式

$$4\left(\frac{x_1+x_3}{2}-\frac{x_2+x_4}{2}\right)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2$$

$$=(x_1+x_3-x_2-x_4)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2$$

$$=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_4-x_4x_1)$$

$$=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_4-x_1)^2.$$

由对称性，关于纵坐标也有类似的等式，所以利用两点间的距离公式就推出

$$
\begin{aligned}
&|A_1A_2|^2+|A_2A_3|^2+|A_3A_4|^2+|A_4A_1|^2 \\
&=4|BC|^2+|A_1A_3|^2+|A_2A_4|^2.
\end{aligned}
$$

注 (1) 本题的纯几何证法并不容易，而采用解析法，只需要简单的计算便达到目的．

(2) 解析法的第一步就是建立坐标系，坐标系选择得是否恰当，直接关系到以后的论证是否简单．有一个原则是说应当选择坐标系使得问题所涉及的坐标中尽可能多地出现零，这自然没有错，尤其在处理计算题时应当遵循这一原则．但在考虑证明题时，仅按照这一原则可能会“占小便宜而吃大亏”，因为“对称性”——一个更有利于论证的特点常常会因此而失去．用解析法论证的一大特色就是已知结果，设法去“凑”，这样，对称性便有重要的作用．如果破坏了对称性，反而会使计算复杂化，甚至更糟的是，面对一堆不对称无规律的式子茫然无绪，进退两难．在例1中，我们选择的是最一般的坐标，其目的就是保持算式的对称性，这样(由于我们知道结果)，解答中代数式的变形几乎是“自然而然”的，并且由横、纵坐标之间的对称性，我们只需算出横坐标的关系式，“同理”便得到关于纵坐标的等式．这时，对称性起了事半功倍的作用．

例2 给定任一锐角三角形ABC及高AH，在AH上任取一点D，连BD并延长交AC于E，又连CD且延长交AB于F，证明$\angle AHE=\angle AHF$．

证 如图21-1，建立直角坐标系，取BC与AH为坐标轴．设A，B，C，D的坐标分别为$A(0,a)$，$B(b,0)$，$C(c,0)$，$D(0,d)$．

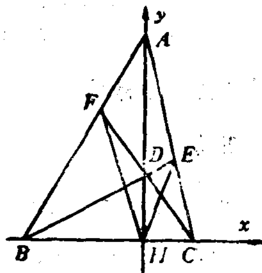


图 21-1

不难写出 BD 及 AC 所在直线的方程为

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{d}=1 \text{及} \frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1.$$

求出它们的交点 E 的坐标，算出 HE 的斜率为 $\frac{ad(b-c)}{bc(a-d)}$.

注意 B，C 两点关于 H 点的位置是“平等”的，在上式中交换 b 与 c，可得 HF 的斜率，它和 HE 的斜率互为相反数，这就意味着 $\angle AHE=\angle AHF$.

注 如果我们设 $B(b,0)$，$C(-c,0)$，b，c 都有正数，则破坏了 B 和 C 的“对称性”.

有些涉及三角形面积的问题也可以用解析法来做.

我们先介绍解析几何中的面积公式（它用行列式来表达最为简单，读者应熟悉三阶行列式的某些性质）：

设三角形 ABC 的顶点坐标为 $A(x_A, y_A)$，$B(x_B, y_B)$，$C(x_C, y_C)$，则其面积为

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A \\ 1 & x_B & y_B \\ 1 & x_C & y_C \end{vmatrix}.$$

当 A，B，C 是逆时针顺序时，行列式的值为正，我们说三角形 ABC 的面积为正；当 A，B，C 是顺时针顺序时，行列式的值为负，我们说三角形 ABC 的面积为负.

下面的问题是这个公式的一个应用.

例 3 设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 是在同一个平面内的两个三角形，$AA' \parallel BB' \parallel CC'$，证明

$$\begin{aligned} &3(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A'B'C'}) \\ &=S_{\triangle AB'C'}+S_{\triangle BC'A'}+S_{\triangle CA'B'}+S_{\triangle A'BC}+S_{\triangle B'CA}+S_{\triangle C'AB}. \end{aligned}$$

这里的面积都是有向面积，即当 A，B，C 呈逆时针顺序时，面积为正，否则面积为负.

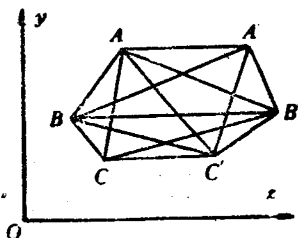


图 21-2

证 如图21-2，以平行于AA'的直线为x轴，则A与A'，B与B'，C与C'的纵坐标相同，这样欲证等式右端的两倍为$2(S_{\Delta AB'C'}+S_{\Delta A'BC'}+S_{\Delta A'B'C}+S_{\Delta A'BC}+S_{\Delta AB'C}+S_{\Delta ABC'})$

$$=\begin{vmatrix}1 & x_A & y_A\\ 1 & x_{B'} & y_B\\ 1 & x_{C'} & y_C\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & x_{A'} & y_A\\ 1 & x_B & y_B\\ 1 & x_{C'} & y_C\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & x_{A'} & y_A\\ 1 & x_{B'} & y_B\\ 1 & x_C & y_C\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}1 & x_{A'} & y_A\\ 1 & x_B & y_B\\ 1 & x_C & y_C\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & x_A & y_A\\ 1 & x_{B'} & y_B\\ 1 & x_C & y_C\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & x_A & y_A\\ 1 & x_B & y_B\\ 1 & x_{C'} & y_C\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 3x_A+3x_{A'} & y_A\\ 1 & 3x_B+3x_{B'} & y_B\\ 1 & 3x_C+3x_{C'} & y_C\end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix}1 & x_A & y_A\\ 1 & x_B & y_B\\ 1 & x_C & y_C\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1 & x_{A'} & y_A\\ 1 & x_{B'} & y_B\\ 1 & x_{C'} & y_C\end{vmatrix}$$

$$=2(3S_{\Delta ABC}+S_{\Delta A'B'C'}).$$

这就证得了结论.

注 我们在开始时，利用了$S_{\Delta BC'A'}=S_{\Delta A'BC'}$等关系式，以使得诸行列式中有一列都相同，便于相加. 同时，把坐标取成最一般的形式，才使得算式成为对称的.

二、平面几何知识在解析几何解题中的应用

下面我们简要地谈谈解析几何中的一个有效技巧，即适当地应用几何知识来帮助解题. 这大致包括两方面的内容，一方面是应用平面几何中的有关定理（通常在涉及直线和圆的问题中用得上）；再者是考虑抛物线、椭圆、双曲线的某些问题时，应注意

它们的几何定义.

例 4 求出直线 $ax+by+c=0$(a, b 不全为 0)和圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 相交的充分必要条件. 并计算在相交时直线被圆截得的弦长.

解 用几何的想法来考虑，注意直线和圆相交的充分必要条件是圆心到直线的距离小于圆的半径. 用代数的式子表示这一点，就是

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}<r, \text{即 } c^2<r^2(a^2+b^2).$$

当这一条件满足时，我们来求直线被圆截得的弦长. 设直线交圆于A, B两点，圆心O到直线所作垂线的垂足是 P，则 P 平分线段AB. 所以(由勾股定理)

$$\frac{1}{4}|AB|^2=|AP|^2=|OA|^2-|OP|^2$$

$$=r^2-\left(\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{r^2(a^2+b^2)-c^2}{a^2+b^2},$$

即
$$|AB|=2\sqrt{\frac{r^2(a^2+b^2)-c^2}{a^2+b^2}}.$$

例 5 长为定值$l(\geqslant 1)$的线段 AB 的端点 A, B 在抛物线 $y=x^2$ 上移动，求它的中点 M 到 x 轴的最小距离.

解 设抛物线的焦点为 F.

M到准线的距离

$$=\frac{1}{2}(A\text{到准线的距离}+B\text{到准线的距离})$$

$$=\frac{1}{2}(|AF|+|BF|)$$

$$=\frac{1}{2}|AB|=\frac{l}{2}.$$

又准线方程是 $y=-\frac{1}{4}$，因此

$$M\text{到 } x \text{ 轴的距离} \geqslant \frac{l}{2} - \frac{1}{4}.$$

当且仅当 AB 过 F 时等号成立。

注 解答中我们除了应用抛物线的定义性质外，还用到了梯形中位线定理以及折线AFB之长不小于线段AB的长。

此题用参数的方法或者完全的代数方法也能达到目的，但看来用几何观念来解比较简便。

例 6 已知抛物线$y^2=2px(p>0)$，其焦点为F，一条过F且倾斜角为θ的直线交抛物线于A，B两点，连结A及抛物线顶点O的直线交准线于B'，连结B及O的直线交准线于A'. 计算四边形$ABB'A'$的面积.

解 先考虑$\theta=\frac{\pi}{2}$的情形，此时所求面积显然等于$2p^2$(利用抛物线的定义性质).

当$\theta\neq\frac{\pi}{2}$时，设直线的斜率为$k=\operatorname{tg}\theta$. 又设$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则$y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$. 关键的一步是要注意到$BB'$平行于$x$轴.

把AB所在的直线方程$y=k\left(x-\frac{p}{2}\right)$与$y^2=2px$联立，消去$x$得到$y^2-\frac{2p}{k}y-p^2=0$.

这样由韦达定理可知

$$y_1\cdot y_2=-p^2 \text{及} y_1+y_2=\frac{2p}{k}. \tag{1}$$

又不难求出$B'\left(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{y_1}\right)$. 可见$B$和$B'$的纵坐标相等，从而$BB'$平行于$x$轴.

由于A，B的位置是平等的，所以AA'也平行于x轴. 这

样$AA'B'B$便是直角梯形．从而其面积等于(注意抛物线的定义性质)

$$\frac{1}{2}|A'B'|\cdot(|AA'|+|BB'|)=\frac{1}{2}|A'B'|\cdot|AB|.$$

显然 $|A'B'|=|y_1-y_2|$，$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$．这样利用(1)，有

$$\frac{1}{2}|A'B'|\cdot|AB|=\frac{1}{2}|y_1-y_2|\cdot\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}(y_1-y_2)^2\cdot\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]$$

$$=2p^2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

例7　已知定圆 O_1 与定圆 O_2，其中圆 O_1 内含于圆 O_2 内，一个动圆与圆 O_1 外切且与圆 O_2 内切，求这动圆圆心 P 的轨迹．

解　本题涉及三个圆，用解析法求轨迹并不方便，我们的处理完全是基于几何的考虑．区分两种情况：

(1) 如果圆 O_1 和圆 O_2 同心(即 O_1，O_2 重合)，则所求的轨迹是以 O_1 为圆心，$\frac{r_2-r_1}{2}$ 为半径的圆，这里 r_1,r_2 分别是圆 O_1 及圆 O_2 的半径，都是定长($r_2>r_1$)．

(2) 如果圆 O_1 和圆 O_2 不同心，设动圆和圆 O_1，圆 O_2 的切点分别是 A,B(如图21-3)，则有

$$PO_1=PA+AO_1, PO_2=BO_2-PB,$$

所以　$PO_1+PO_2=r_1+r_2$是定值．

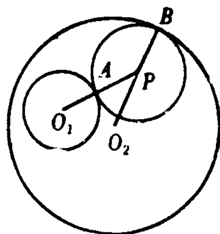


图 21-3

由椭圆的定义可知，P 在以 O_1，O_2 为焦点，长轴为 r_1+r_2 的椭圆上．

又因为圆 O_1 上任意一点到 O_1,O_2 距离之和小于 r_1+r_2，圆 O_2 上任一点到 O_1，O_2 的距离之和大于 r_1+r_2，所以椭圆和圆O_2

不相交且包含圆 O_1，这样易见椭圆上任意一点都是轨迹中的点．

习 题 21

1．P为等边三角形ABC的内切圆上任意一点，证明$PA^2+PB^2+PC^2$为一常数．

2．一直线过点(1,2)，且被两平行直线$4x+3y+1=0$和$4x+3y+6=0$截得的线段长为$\sqrt{2}$，求这条直线的方程．

3．已知抛物线$y^2=2px$及一定点A，试在抛物线上找一点B，使$|AB|+|BF|$最小，其中F是抛物线的焦点．

4．已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$F_1$，$F_2$分别是其左、右焦点，设$P$是椭圆上任一点．试证明：以$PF_2$为直径的圆和以长轴为直径的圆相切．

第22讲　利用直线束和圆束解题

杜锡录

在解析几何中，直线束和二次曲线束是很重要的内容　在本讲中，将简要地介绍它们，以提供一个用解析法处理平面几何问题的工具．

一、直线束

若直线 l_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$　(1)

与直线 l_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$　(2)

相交于 S 点，则 l_1 和 l_2 的线性组合：

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2)=0 \quad (3)$$

(其中 α,β 是不全为 0 的实数)表示过 S 点的所有直线，称为过 S 点的直线束．注意这包含了两层意思，其一是说，对任意不全为 0 的实数 α,β，(3)式表示过 S 点的直线方程(要给出证明的话，即要证 x,y 的系数不全为 0，且 S 点的坐标适合这方程)；其二是说，对任何过 S 的直线方程，一定有适当的实数 α，β(不全为 0)使其能够写成(3)的形式．

特别地，当 $\alpha=0$ 时，(3)成为(2)；当 $\beta=0$ 时，(3)成为(1)．直线束(3)中，我们除去 l_2 的方程，则 $\alpha\neq0$．令 $\lambda=\frac{\alpha}{\beta}$，则(3)成为

$$a_1x+b_1y+c_1+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0. \quad (4)$$

直线束(4)则表示了过 S 的全体直线(除了 l_2)，这种形式在实用中更方便．

例1　已知两直线 $2x+3y-5=0$，$7x+15y+1=0$ 相交于点 S．求出过点 S 且垂直于直线 $12x-5y-1=0$ 的直线方程．

解 已知两条直线确实相交$\left(因为\frac{2}{7}\neq\frac{3}{15}\right)$，我们作出过$S$的直线束的方程：

$$2x+3y-5+\lambda(7x+15y+1)=0. \qquad (5)$$

(5)可变形为

$$(2+7\lambda)x+(3+15\lambda)y+(-5+\lambda)=0,$$

它的斜率
$$k=-\frac{2+7\lambda}{3+15\lambda}.$$

直线$12x-5y-1=0$的斜率为 $k_1=\frac{12}{5}$.

根据两条直线垂直的条件，知$k\cdot k_1=-1$，即

$$-\frac{2+7\lambda}{3+15\lambda}\cdot\frac{12}{5}=-1,$$

得出$\lambda=-1$．代入(5)式可知所求的直线为$5x+12y+6=0$.

用解析法处理平面几何问题时，直线束经常用得上．

例2 在矩形$ABCD$中，点M是边AD的中点，N是边BC的中点．在线段CD的延长线上取点P Q为直线PM和AC的交点．证明$\angle QNM=\angle MNP$.

证 建立如图22-1所示的直角坐标系，N为原点，C，M的坐标分别是$(a,0)$，$(0,b)$，又设P所在直线的斜率为k，则PQ所在直线的方程是

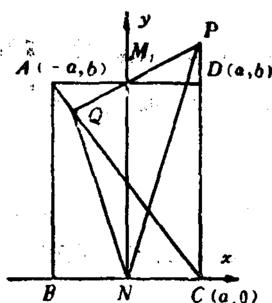


图 22 1

$$kx-y+b=0, \qquad (6)$$

CD所在直线的方程是

$$x-a=0. \qquad (7)$$

以a乘(6)式，b乘(7)式并相加得

$$(ak+b)x-ay=0. \qquad (8)$$

(8)经过PQ及CD的交点P，又经过原点$N(0,0)$，因此这就是PN所在直线的方程.

AC所在直线的方程是

$$bx+2ay-ab=0. \tag{9}$$

(6)$\times a+$(9)，得

$$(ax+b)x+ay=0. \tag{10}$$

同理，这样 QN 所在直线的方程. 从(8),(10)可看出这两直线的斜率互为相反数，因此$\angle QNM=\angle MNP$.

注 取 N点为坐标原点的好处在便于比较两条直线的斜率. 在求 PN, QN 所在直线的方程时，我们是应用直线束的知识"凑"出来的，避免了求 P，Q 的坐标.

例 3 CH是$\triangle ABC$中边AB上的高，H为垂足，点 K, P 分别是 H 关于边 AC 和 BC 的对称点. 证明：线段KP与 AC, BC（或它们的延长线）的交点是$\triangle ABC$高线的垂足.

略证 建立如图22-2所示的直角坐标系，设 A，B，C 三点的坐标依次为$A(a,0)$，$B(b,0)$，$C(0,c)$，则

$P\left(\dfrac{2bc^2}{b^2+c^2}, \dfrac{2b^2c}{b^2+c^2}\right)$. 将$P$的坐标表达式中 a,b 互换，就得到

$K\left(\dfrac{2ac^2}{a^2+c^2}, \dfrac{2a^2c}{a^2+c^2}\right)$，于是 KP 所在直线的方程是

$$c(a+b)x+(ab-c^2)y-2abc=0. \tag{11}$$

另一方面，BC所在直线的方程是

$$cx+by-bc=0. \tag{12}$$

BC 上的高线方程是

$$bx-cy-ab=0. \tag{13}$$

(12)乘以 a,(13)乘以 c，两者相加，就得出(11)式，于是KP经过 BC 上高线的垂足，同理，KP 也经过 AC 上高线的垂足.

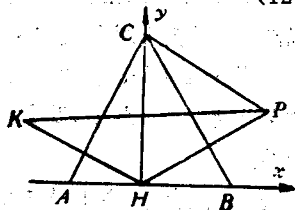


图 22-2

下面的问题的纯几何解法颇不容易，但用解析法却并无特别

的困难，注意我们的处理充分利用了对称性。

例 4 如图22-3，在三角形ABC的外侧作正方形ACA_1A_2和BCB_1B_2，证明直线A_1B, A_2B_2和AB_1相交于一点。

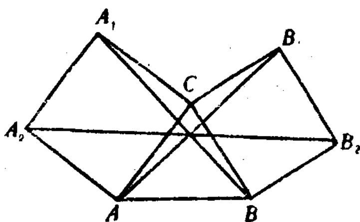


图 22-3

证 建立直角坐标系，设A，B，C的坐标分别是$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$，注意$BCB_1B_2$，$CAA_2A_1$按顺时针排列．设$B_1(x_{B_1}, y_{B_1}), B_2(x_{B_2}, y_{B_2})$，$A_1(x_{A_1}, y_{A_1}), A_2(x_{A_2}, y_{A_2})$，可以得到

$$x_{B_1}=x_C-y_B+y_C, y_{B_1}=y_C-x_C+x_B, \tag{14}$$

$$x_{B_2}=x_B-y_B+y_C, y_{B_2}=y_B-x_C+x_B, \tag{15}$$

$$x_{A_1}=x_C+y_A-y_C, y_{A_1}=y_C+x_C-x_A, \tag{16}$$

$$x_{A_2}=x_A+y_A-y_C, y_{A_2}=y_A+x_C-x_A. \tag{17}$$

此外，AB_1, BA_1, A_2B_2所在直线的方程依次是

$$(y_A-y_{B_1})x+(x_{B_1}-x_A)y+x_Ay_{B_1}-y_Ax_{B_1}=0. \tag{18}$$

$$(y_B-y_{A_1})x+(x_{A_1}-x_B)y+x_By_{A_1}-y_Bx_{A_1}=0. \tag{19}$$

$$(y_{A_2}-y_{B_2})x+(x_{B_2}-x_{A_2})y+x_{A_2}y_{B_2}-y_{A_2}x_{B_2}=0. \tag{20}$$

AB_1, BA_1, A_2B_2所在的直线两两相交．为了证明方程(18)，(19)，(20)所表示的直线过同一点，只要证明其中一个能写成另外两个的线性组合(这里用到直线束的知识)．考虑到(14)，(15)，(16)，(17) 用-1乘(18)后再和(19)，(20)相加，得到恒等式$0=0$．这就意味着直线BA_1, A_2B_2的交点在直线AB_1上，从而所说的三线共点．

注 选择最一般的坐标的目的在于不破坏对称性，这样得出的算式整齐且对称，反而简化了计算过程并便于观察(最后一步)，由于解(18)，(19)两式的联立方程将非常复杂，因而直线束

的好处在这里明显地体现出来了.

二、圆束

假设圆 C_1:

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 + a_1x + a_2y + c_1 = 0 \qquad (1)$$

与圆 C_2:

$$f_2(x, y) = x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad (2)$$

相交于两点，则

$$f_1(x, y) + \alpha \cdot f_2(x, y) = 0 \qquad (3)$$

表示过 C_1,C_2 两个交点的所有圆（除了 C_2），称为过这两交点的圆束. (3)中的 α 是任意实数，特别地，取 $\alpha = 0$，则(3)成为(1). 当$\alpha = -1$时，(3)成为一条直线的方程. 它就是 C_1,C_2 的公共弦的方程(可以看作为圆的极限情形). 这一点是特别有用的，我们也能直接导出来，因为(1) 和 (2) 之差是 x,y 的一次式，故表示一直线，它显然经过两圆的交点，所以就是公共弦所在直线的方程.

例 5 已知一圆，经过圆$x^2 + y^2 - 2x + 3y - 7 = 0$，及$x^2 + y^2 + 3y - 4 = 0$ 的交点，又经过点$(-2, 1)$，求它的方程.

解 因两圆心之距小于两圆半径之和，故两圆是相交的. 又圆 $x^2 + y^2 + 3y - 4 = 0$不经过$(-2, 1)$，可设所求的圆是

$$x^2 + y^2 - 2x + 3y - 7 + \alpha(x^2 + y^2 + 3y - 4) = 0,$$

此即 $$(1 + \alpha)x^2 + (1 + \alpha)y^2 - 2x + (3\alpha + 3)y - 7 - 4\alpha = 0.$$

它经过点$(-2, 1)$，故以 $x = -2$, $y = 1$ 代入上式得 $\alpha = -\dfrac{5}{4}$.

于是所求圆的方程是 $x^2 + y^2 + 8x + 3y + 8 = 0$.

注 本题与例 1 类似，用圆束来解，避免了求两圆的交点坐标及其他运算，简便了许多.

下面两个问题都和两相交圆的公共弦有关，我们提供的解法回避了许多繁杂的计算

例 6 过圆 $x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$ 外一点 $P(a, b)$，作圆的两条切线，求两个切点所确定的直线的方程.

解 设圆心为 Q，两个切点为 A 和 B. 连 QA，QB 可知，P,A,Q,B 四点共圆. 于是所求的直线经过 PQ 为直径的圆与已知圆的交点.

不难求出以 PQ 为直径的圆的方程是

$$x^2+y^2+\left(\frac{a_1}{2}-a\right)x+\left(\frac{b_1}{2}-b\right)y-\frac{a_1a_2}{2}-\frac{b_1b_2}{2}=0,$$

将它与所给圆的方程相减，得

$$\left(a-\frac{a_1}{2}\right)x+\left(b-\frac{b_1}{2}\right)y+\frac{a_1a_2}{2}+\frac{b_1b_2}{2}+c_1=0.$$

此即所求直线的方程.

例 7 已知三个圆两两相交，证明：所得到的三条公共弦所在直线或者相交于一点，或者两两平行.

证 设三个圆的方程是

$$x^2+y^2+a_ix+b_iy+c_i=0 (i=1,2,3),$$

两两相减得到公共弦所在直线的方程为

$$(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+(c_1-c_2)=0, \tag{4}$$

$$(a_2-a_3)x+(b_2-b_3)y+(c_2-c_3)=0, \tag{5}$$

$$(a_3-a_1)x+(b_3-b_1)y+(c_3-c_1)=0. \tag{6}$$

如果直线(4)和(5)有交点，把(4)，(5)，(6)三式相加，得一恒等式. 可见直线(6)经过(4)和(5)的交点，于是三线共点.

如果直线(4)和(5)平行，则有实数 k 使得

$$a_1-a_2=k(a_2-a_3), b_1-b_2=k(b_2-b_3), c_1-c_2=k(c_2-c_3),$$

这样 $a_3-a_1=-(a_1-a_2)-(a_2-a_3)=-(k+1)(a_2-a_3)$,

同理 $b_3-b_1=-(k+1)(b_2-b_3), c_3-c_1=-(k+1)(c_2-c_3)$.

所以直线(5)和(6)也平行，从而三直线两两平行.

注 由于问题中的三个圆的位置是“平等”的，所以把三个圆

的方程写成一般式比较适宜(这样保持了对称性). 我们的技巧在于用圆束直接写出了三个公共弦所在直线的方程，而证明三线共点时则应用了直线束的知识. 读者当能看出用解析法处理平面几何问题，虽然计算是无法避免的，但决非是"死算"，它实际上是用代数的技巧取代了几何技巧.

习 题 22

1. 不求交点坐标，证明三条直线

$$l_1: 5x+12y+9=0,$$
$$l_2: 2x+11y+4=0,$$
$$l_3: 13x+25y+23=0.$$

相交于一点.

2. 在锐角三角形ABC中引高线BB_1和CC_1，O是外接圆的圆心. 证明：直线 AO 和 B_1C_1 垂直.

3. 求经过两圆$x^2+y^2-4x-3=0$和$x^2+y^2-y-3=0$的交点，并且圆心在直线$x-y-4=0$上的圆的方程.

4. 设在直线AB上有点A，B以及两点间的一点M，又在AB的同一侧以AM，MB为一边作正方形$ABCD$和$MBEF$. 这两个正方形的外接圆除点M外还交于一点N. 证明：

(1) 直线AF和BC都经过N.

(2) 与M的位置无关，MN总通过一个定点.

第23讲　复数与几何(一)

常庚哲

在中学数学里，同学们都学习过复数．但是，那是从代数的观点来学复数的，特别注重复数的代数性质，虚单位i正是作为在实数范围内没有解的方程$x^2+1=0$的一个根而引入的．在中学的教科书中，复数的几何性质没有被充分地强调，至于复数的几何应用，更是很少涉及．

事实上，有很多的平面几何问题，是可以利用复数来解决的，这并没有什么奇怪，因为复数既可以看成平面上的点，又可以看成平面向量．用模长为1的复数作乘法，代表着平面上的旋转．所有这些，都使复数成为一种解几何题的有力工具．

以下的两讲中，我们介绍复数的几何应用．

一、复数的三种表示法

这里的内容是中学代数课本中有过的．为了完备起见，我们在此作一个概述．

形如$z=x+iy$的数，这里x, y为实数，i适合$i^2=-1$,称为一个复数．x称为z的实部，记作$x=\mathrm{Re}(z)$；y称为z的虚部，记作$y=\mathrm{Im}(z)$．如果平面上已有一个直角坐标系，我们用点(x, y)来代表复数$x+iy$,这样就把复数同平面上的点之间一对一地对应起来，坐标系的原点O就代表复数0，横轴上的点与所有的实数相对应，所以也叫实轴，纵轴则称为虚轴．这个坐标系称为复坐标系．

如果$z=x+iy$，则复数$\overline{z}=x-iy$称为z的共轭复数．很明白，在复坐标系中，代表z的点与代表$\overline{z}$的点是关于实轴对称的两点(图23-1)．

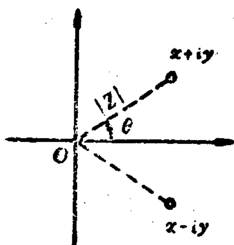


图 23-1

注意：$z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2$.　　(1)

这里$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，它代表点Z到原点的距离．由此可知$|z|^2=z\bar{z}$．复数的表达式

$$z=x+iy \quad (2)$$

称为复数的代数形式．

设$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$为两个复数，则$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$，由此式可知，复数的加法满足平行四边形规则(图23-2)．这表明，复数z又可以被看成是由原点出发，终点为点Z的向量，向量的加法运算正是适合平行四边形规律的．

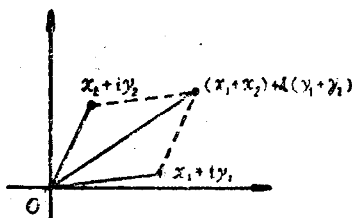


图 23-2

如果把由正实轴按反时针方向转动到向量$\overrightarrow{OZ}$扫过的角记为θ，则θ称为z的辐角，记为$\arg z$，只有对复数0无法定义辐角．由图23-1可见$x=|z|\cos\theta$，$y=|z|\sin\theta$，

由此得出
$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta), \quad (3)$$

这种表示法称为复数的极形式，若令$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，

则(3)可表为
$$z=|z|e^{i\theta}, \quad (4)$$

这叫做复数表示的指数形式，指数形式是极形式的简写．所以实质上重要的表示形式只有两种：代数形式与指数形式．它们各有各的优点，利用代数形式作加法，体现了复数的向量性质．表示式(4)中，$|z|$表示了向量$\overrightarrow{OZ}$的长，模为1的复数$e^{i\theta}$则指明了这个向量的方向．指数形式对于乘法有特别的意义：若$z=|z|e^{i\theta}$，$w=|w|e^{i\varphi}$，那么
$$zw=|z||w|e^{i(\varphi+\theta)}. \quad (5)$$

这表明$|zw|=|z||w|$，而乘积zw的辐角等于z与w这二者的辐角相加．特别地，若(5)中$|w|=1$，则$ze^{i\varphi}=|z|e^{i(\theta+\varphi)}$.　(6)

这个式子表明：用 $e^{i\varphi}$ 去乘一个复数 z，不会改变它的模长，只会使向量$\overrightarrow{OZ}$绕原点旋转角度 φ. 这一认识，对用复数解几何题是至关重要的.

二、两点间的距离

设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，那么 $z_2-z_1=z_2+(-z_1)$代表着向量$\overrightarrow{Z_1Z_2}$(图23-3). 因此，点 Z_1，Z_2 之间的距离由$|z_2-z_1|$来表示，若用它们的实部与虚部来描述，则是

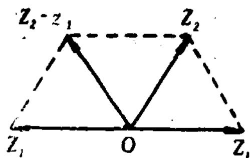


图 23 3

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ ,$$

这正是解析几何中点(x_1, y_1)与(x_2, y_2)之间的距离公式.

满足$|z|=1$的点 Z 的全体就是以 O 为中心，以 1 为半径的圆周上点的全体.这个圆叫做单位圆. $|z|=1$也可写为$|z|^2=1$，即$z\bar{z}=1$,通过实部与虚部来表示乃是 $x^2+y^2=1$，这与解析几何中的结论是一致的. 以复数 z_0 为中心，r 为半径的圆的方程是$|z-z_0|=r$. (7)

例 1 三个复数 z_1，z_2，z_3 满足 $z_1+z_2+z_3=0$，$|z_1|=|z_2|=|z_3|$.在复坐标系中，$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，$\overrightarrow{OZ_3}$分别表示 z_1，z_2，z_3. 求证：$\triangle Z_1Z_2Z_3$ 是一个正三角形.

证 无妨设$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. 要证的是$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$. 由于

$$\begin{aligned}|z_1-z_2|^2&=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)\\&=|z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)=2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)\ ,\end{aligned}$$

并且$z_3=-(z_1+z_2)$,故

$$\begin{aligned}1=|z_3|^2&=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\&=1+1+(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2),\end{aligned}$$

由此得

$$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=-1,$$

所以，$|z_1-z_2|^2=2-(-1)=3$. 从而证得了 $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$.
同理可证 $\quad |z_2-z_3|=|z_3-z_1|=\sqrt{3}$.

例 2 复平面上动点 Z_1 的轨迹方程为 $|z_1-z_0|=|z_1|$，Z_0 为定点 $Z_0\neq 0$，另一动点 Z 满足 $z_1z=-1$，求点 Z 的轨迹，指明它在复平面上的形状和位置.（1988年全国高中数学联赛试题.）

解 由 $z_1z=-1$ 可知 $z\neq 0$，由此得 $z_1=-1/z$，将此式代入 $|z_1-z_0|=|z_1|$ 得 $|1/z+z_0|=|1/z|$ 即 $|zz_0+1|=1$. 由此又得 $\left|z-\left(-\frac{1}{z_0}\right)\right|=\frac{1}{|z_0|}$，所以 Z 是 $-1/z_0$ 为中心，$1/|z_0|$ 为半径的圆周，但应除去原点.

三、中点公式

设 Z_1 与 Z_2 是平面上的两点，那么连结 Z_1 与 Z_2 的直线段上的中点 M 可用复数 $m=(z_1+z_2)/2$ 来表示，即

$$m=\frac{z_1+z_2}{2}, \tag{8}$$

这就是所谓的中点公式. 这个公式虽然十分简单，但可以帮助我们做一些几何题目.

例 3 求证平行四边形的对角线互相平分.

证 设四边形的四个顶点 A,B,C,D 可依次表示复数 a,b,c,d（见图23-4）. 如果这个四边形是一个平行四边形，必须且只须 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 平行且有相等的长度，即 $d-a=c-b$.

由此得出 $$a+c=b+d, \tag{9}$$

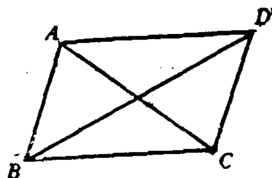


图 23-4

它表明：对角顶点的复数表示之和是相等的，式 (9) 是 $ABCD$ 成为平行四边形的必要充分条件，依中点公式(8)，对角线 AC 的中点为 $(a+c)/2$，对角线 BD 的中点是 $(b+d)/2$. 由式(9)可见，它们是相

等的，这也就是说，两条对角线互相平分．显然，一个四边形若有此性质，它一定是平行四边形．

例 4 在任意给定的四边形的每一条边上取中点，求证这四点组成一个平行四边形．

证 设原四边形的四个顶点可依次表示复数a.b,c,d,那么，每条边上的中点依次是

$$\frac{a+b}{2},\quad \frac{b+c}{2},\quad \frac{c+d}{2},\quad \frac{d+a}{2}.$$

由于有等式

$$\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}=\frac{b+c}{2}+\frac{d+a}{2},$$

按(9)式的解释可知，这四个点是一平行四边形的顶点．

四、旋转

在本讲的最前面已经谈到，复数 $ze^{i\theta}$ 所代表的点，是点Z与原点所连线段反时针方向旋转 θ 角之后所得线段的终点．

如果取$\theta=\frac{\pi}{2}$，那么 $e^{i\theta}=i$，这表明向量 z 与 iz 之间所夹的角为一直角．

例 5 如图23-5，$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 是两个不全等的等腰直角三角形．现固定$\triangle ABC$，而将$\triangle ADE$ 绕 A 点在平面上旋转．试证：不论$\triangle ADE$旋转到什么位置，线段 EC 上必存在一点M，使 $\triangle BMD$ 为等腰直角三角形．(1987 年全国高中数学联赛试题．)

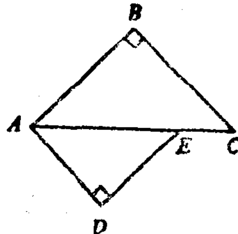


图 23 5

证 不妨把复平面的原点放在 A 上，C 放在正实轴上，因此 $A=0$，又不妨设 $C=\sqrt{2}$，$B=e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$．

$E=\lambda$，这里 $0<\lambda<\sqrt{2}$，于是

$$D=\frac{\lambda}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

在旋转任一角度θ之后，E变为$\lambda e^{i\theta}$，而D变为$\frac{\lambda}{\sqrt{2}}e^{\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)i}$，仍记为$D$. 取$\lambda e^{i\theta}$与$C=\sqrt{2}$的连线的中点并记为$M$，于是

$$M=\frac{1}{2}(\lambda e^{i\theta}+\sqrt{2}).$$

考察三点$B=e^{i\frac{\pi}{4}}$，M，$D=\frac{\lambda}{\sqrt{2}}e^{\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)i}$.

易见$M(1+i)=M\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$=\lambda\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}i+e^{i\frac{\pi}{4}}=CDi+B,$$

由此得出
$$(B-M)i=D-M,$$

此式表明：由向量$\overrightarrow{MB}$绕点M沿反时针方向旋转$90°$之后得到向量$\overrightarrow{MD}$，可见$\triangle BMD$为一等腰直角三角形，直角顶点在M.

例6 设$ABCDEF$为内接于一个半径为r的圆的六边形. 如果$AB=CD=EF=r$，求证：线段BC，DE和FA的中点P，Q，R组成一个正三角形.

证 取此圆的圆心为复平面的原点. 设A,B,C,D,E,F在圆周上依反时针方向排列. 由题设，我们有$\triangle OAB$，$\triangle OCD$，$\triangle OEF$为正三角形，因此，令$u=e^{i\pi/3}$，则有

$$B=uA,\ D=uC,\ F=uE.$$

于是
$$2P=B+C=uA+C,$$
$$2Q=D+E=uC+E,$$
$$2R=F+A=uE+A,$$

由此，
$$2(P-R)u=[(u-1)A+C-uE]u$$
$$=(u^2-u)A+Cu-u^2E.$$

但是由于$u^3=e^{i\pi}=-1$，即$u^3+1=0$，分解因式得

$(u+1)(u^2-u+1)=0$，由此得

$$u^2-u+1=0, \tag{10}$$

从而

$$\begin{aligned}2(P-R)u &= -A+Cu-(u-2)E\\ &=uC+E-(uE+A)\\ &=2Q-2R=2(Q-R),\end{aligned}$$

亦即$(P-R)u=Q-R$。此式表明，向量$\overrightarrow{RP}$绕点R旋转60°之后得出向量$\overrightarrow{RQ}$，这就证明了$\triangle PQR$为一个正三角形。

习　题　23

1．设$A_1A_2\cdots A_n$是内接于中心在O，半径为r的一个圆的正n边形。P是延长线OA_1之外的一个点．求证：

$$PA_1\cdot PA_2\cdot\cdots\cdot PA_n=OP^n-r^n.$$

2．设$A_1A_2\cdots A_n$为内接于单位圆的一个正n边形．P为单位圆上的任一点，求证：

$$PA_1^2+PA_2^2+\cdots+PA_n^2$$

为一常数(即与P点的位置无关)。

3．P_1，$P_2,\cdots,P_n$是平面上任意给定的n个点．试求出一点A，使得

$$AP_1^2+AP_2^2+\cdots+AP_n^2$$

为最小．

4．设A,B,C为平面上任意给定的三点．设P_0为同一平面上的任一点，连P_0A并延长P_0A到P_1，使$P_0A=AP_1$；连P_1B并延长P_1B到P_2，使$P_1B=BP_2$；连P_2C并延长P_2C到P_3，使$P_2C=CP_3$；由P_3再对A重复同一过程得P_4；…；如此等等．求证：经6次这种操作之后必回到了原地，即$P_6=P$．

5．设$ABCD$为任意给定的四边形．以它的每一边为斜边，向外作一个等腰直角三角形，那四个直角顶点依次记为A',B',C',D'．在四边形$A'B'C'D'$的各边上再取中点A'',B'',C'',D''．求证：$A''B''C''D''$为一正方形。

第24讲　复数与几何(二)

常　庚　哲

一、等边三角形

如果$\triangle Z_1Z_2Z_3$为一等边三角形（也称正三角形），必须而且只须

$$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|.$$

这里实际上是两个等式，有时使用起来不太方便．利用旋转，可以得到等边三角形的另外一些必要充分条件，这些条件使用起来是方便的．

观察图 24-1 中的两个正三角形，以左边那个图形来说，将

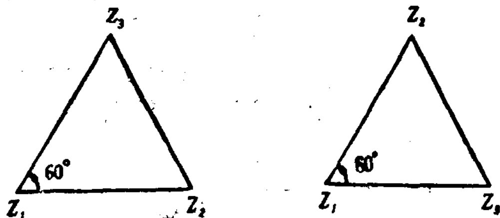


图 24-1

向量$\overrightarrow{Z_1Z_2}$沿反时针方向旋转 60°，便会与$\overrightarrow{Z_1Z_3}$重合．因此，若令$u=e^{i\pi/3}$，则有$(z_2-z)u=z_3-z_1$，经移项、合并之后，得到$(1-u)z_1+uz_2-z_3=0$．但由于

$$u^2-u+1=0, \tag{1}$$

所以有

$$u^2z_1-uz_2+z_3=0. \tag{2}$$

对于右边那个正三角形，由$(z_3-z_1)u=z_2-z_1$能够得出

$$u^2z_1-uz_3+z_2=0. \tag{3}$$

满足(2)与(3)中间的任何一个等式时，便可断言$\triangle Z_1Z_2Z_3$为正

三角形．这些条件更优势之处是，它们还告诉我们这些正三角形的定向：如果 z_1，z_2，z_3 适合(2)，那么 $Z_1 \to Z_2 \to Z_3 \to Z_1$ 的绕行方向是反时针的，这时称 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 为正向三角形；如果(3)式成立，那么 $Z_1 \to Z_2 \to Z_3 \to Z_1$ 是顺时针方向绕行的，这时称 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 为负向正三角形——此时，$\triangle Z_1Z_3Z_2$ 便是正向正三角形了．

例1 设 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 为任意给定的正向三角形(不必为正三角形)．在边 Z_1Z_2 上，以它为底，向外作一个顶角为 120°的等腰三角形，顶角点记为 W_3，称为自由顶点，在边 Z_2Z_3 与 Z_3Z_1 上也作同样的处理，得到的自由顶点分别记为 W_1 与 W_2．求证：$\triangle W_1W_2W_3$ 是一个正向正三角形(这个断言在几何中叫做拿破仑定理)．

证 首先看看如何通过 Z_1，Z_2 来表示自由顶点 W_3．由图 24-2可见 $\overrightarrow{W_3Z_2}$ 绕 W_3 沿反时针方向转 120° 便到达 $\overrightarrow{W_3Z_1}$，所以

$$(z_2 - w_3)u^2 = z_1 - w_3,$$

这里 $u = e^{i\pi/3}$．类似地，还有两个等式

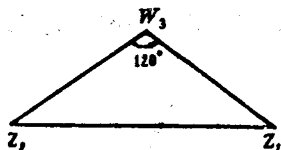


图 24-2

$$(z_3 - w_1)u^2 = z_2 - w_1,$$
$$(z_1 - w_2)u^2 = z_3 - w_2.$$

由以上三个等式得到

$$(1 - u^2)w_1 = z_2 - u^2z_3,$$
$$(1 - u^2)w_2 = z_3 - u^2z_1,$$
$$(1 - u^2)w_3 = z_1 - u^2z_2.$$

用 u^2，$-u$，1 依次乘上式双边后相加，得

$$\begin{aligned}&(1 - u^2)(u^2w_1 - uw_2 + w_3)\\ &= (1 + u^3)z_1 + z_2(u^2 - u^2) + z_3(-u - u^4)\\ &= (1 + u^3)(z_1 - uz_3),\end{aligned}$$

由于 $1+u^3=0$ 而 $1-u^2\neq 0$，由上式可知

$$u^2w_1-uw_2+w_3=0,$$

依(2)式，可以断言$\triangle W_1W_2W_3$为正向的等边三角形．

这里的$\triangle W_1W_2W_3$称为$\triangle Z_1Z_2Z_3$的外拿破仑三角形；如果把题中的向外改为向内，得出的三角形叫$\triangle Z_1Z_2Z_3$的内拿破仑三角形，它也是一个等边三角形．．

例2 设 A，B，C 是平面上的三点．有一个人从平面上另一点 P_0 出发，朝 A 直线前进，到达 A 后，偏离原前进方向左转60°再继续直线前进到达 P_1，并且 $P_0A=AP_1$；接着，从 P_1 出发往B直线前进，到达 B 后，左转60°后继续直线前进到达 P_2，这里$P_1B=BP_2$．同样的动作对C再作一次到达P_3．这时，此人发现已经回到了原出发点P_0.求证：$\triangle ABC$必为一等边三角形．

（请将本例与习题23中的第4题对照，也请与第27届国际数学奥林匹克的第2题对照．）

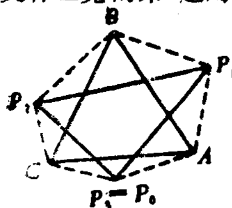


图 24-3

证 考察图24-3．由题设可知
$\angle P_0AP_1=\angle P_1BP_2=\angle P_2CP_0=180°-60°=120°$，并且
$P_0A=AP_1$，$P_1B=BP_2$，$P_2C=CP_0$，
由此可知$\triangle ABC$是$\triangle P_0P_1P_2$的外拿破仑三角形，由例1的结论知$\triangle ABC$是等边的．

二、两三角形的直接相似

设$\triangle Z_1Z_2Z_3$，$\triangle W_1W_2W_3$为复平面上的两个三角形，于是等式

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1} \tag{4}$$

与以下两个等式等价：

$$\frac{|z_3-z_1|}{|z_2-z_1|}=\frac{|w_3-w_1|}{|w_2-w_1|}, \tag{5}$$

$$\arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\right)=\arg\left(\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1}\right). \qquad (6)$$

等式(6)表示的几何事实为：$\overrightarrow{Z_1Z_2}$绕Z_1这一点转到$\overrightarrow{Z_1Z_3}$所扫过的角度等于$\overrightarrow{W_1W_2}$绕点W_1转到$\overrightarrow{W_1W_3}$所扫过的角度；而等式(5)的几何意义是：两个三角形中，顶点Z_1与W_1处的夹角的两边成比例．由此(4)表明$\triangle Z_1Z_2Z_3$与$\triangle W_1W_2W_3$相似，不仅如此，(4)还蕴涵着这两个三角形的定向相同．这种相似称为直接相似．等式(4)为$\triangle Z_1Z_2Z_3$与$\triangle W_1W_2W_3$直接相似的必要充分条件．直接相似仍记为$\triangle Z_1Z_2Z_3 \backsim \triangle W_1W_2W_3$.

例3 设$\triangle ABC$为任意给定的三角形．BC，CA，AB的中点分别为A'，B'，C'．求证：

$$\triangle A'C'B \backsim \triangle CB'A' \backsim \triangle B'AC' \backsim \triangle C'A'B' \backsim \triangle CAB.$$

证 设点A，B，C，A'，B'，C'分别表示复数a，b，c，a'，b'，c'．在复平面上，由中点公式

$$a'=\frac{b+c}{2},\quad b'=\frac{c+a}{2},\quad c'=\frac{a+b}{2},$$

于是有
$$\frac{c'-b}{a'-b}=\frac{\frac{a+b}{2}-b}{\frac{b+c}{2}-b}=\frac{a-b}{c-b},$$

由此式知$\triangle A'C'B \backsim \triangle CAB$.

同理可证$\triangle CB'A' \backsim \triangle CAB$，$\triangle B'AC' \backsim \triangle CAB$.

最后
$$\frac{c'-a'}{b'-a'}=\frac{\frac{a+b}{2}-\frac{b+c}{2}}{\frac{c+a}{2}-\frac{b+c}{2}}=\frac{a-c}{a-b}=\frac{c-a}{b-c},$$

这也就是$\triangle C'A'B' \backsim \triangle CAB$.

当然，上述例子用综合几何的方法也是很容易证明的．但是，下述的例子更能体现用复数解几何题的优越性．

例 4 平面上有5个点A, B, C, U, V，分别表示复数a, b, c, u, v. 如果$\triangle AUV$, $\triangle VBU$, $\triangle UVC$彼此直接相似，求证：$\triangle ABC$也与它们直接相似.

证 在复平面上考虑问题，由题设可以写出以下的等式

$$\frac{v-a}{u-a}=\frac{u-v}{b-v}=\frac{c-u}{v-u},$$

使用加比定理，得出

$$\frac{v-a}{u-a}=\frac{(v-a)+(u-v)+(c-u)}{(u-a)+(b-v)+(v-u)},$$

即 $\dfrac{v-a}{u-a}=\dfrac{c-a}{b-a}$,

这正是说$\triangle AUV\backsim\triangle ABC$.

注意，在证明这一问题的时候，我们没有作任何的几何图形. 但是，如果用综合几何的方法来证题的时候，为了得出正确的几何关系，比较准确的几何图形是必不可少的. 试想，若要你安排平面上5个点，使得其中有4个三角形彼此直接相似，本身已是一件费事的工作，更不用说我们还须从正确的图形中找出一条可行的证明路线了.

三、点到直线的垂足

设点Z_1,Z_2代表复平面上的两个相异的点；设Z是复平面上的另一点. 点Z_1与Z_2决定一条直线，我们来求由点Z到Z_1, Z_2决定的直线的垂足M，点Z_1, Z_2, Z, M分别表示复数z_1, z_2, z, m.

如果Z不在所说的直线上，那么不同的两点M, Z也可决定一直线，它与直线Z_1Z_2垂直. 延长ZM到MZ'，使这两线段长度相等. 这就是说：M为Z与Z'的中点. 因此，只要算出了Z'，也就容易得到M.

由图 24-4 可见，$\triangle Z_1Z_2Z$与$\triangle Z_1Z_2Z'$并不直接相似，因为

它们的定向正好相反．也就是说，以下两个复数$\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$，$\frac{z'-z_1}{z_2-z_1}$

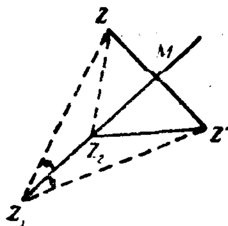


图 24-4

有相等的模，但有符号相反、绝对值相等的辐角，因此这两个复数互为共轭，即

$$\frac{z'-z_1}{z_2-z_1}=\overline{\left(\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)},$$

移项化简之后 $z'=z_1+\left(\frac{\overline{z_2}-\overline{z_1}}{\overline{z_2}-\overline{z_1}}\right)(\overline{z}-\overline{z_1})$.

由于$m=(z+z')/2$，得到公式

$$m=\frac{1}{2}\left[z+z_1+\left(\frac{z_2-z_1}{\overline{z_2}-\overline{z_1}}\right)(\overline{z}-\overline{z_1})\right], \qquad (7)$$

这就是点到直线的垂足公式．

有了这一些预备知识，我们可以来讨论几何中有名的西摩松定理．

例5 （西摩松定理）从△ABC的外接圆上的任一点P，向三边BC，CA，AB或其延长线上引垂线，设垂足分别为D，E，F，则这三点在同一直线上．

证 （复数证法）设△ABC的外接圆是复平面上的单位圆，又设A，B，C，P四点分别表示复数z_1，z_2，z_3，z．于是$|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z|=1$，也就是

$$z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}=z_3\overline{z_3}=z\overline{z}=1.$$

由P向AB所作垂线的垂足F用复数m表示，那么，m由公式(7)表示．用$\overline{z_1}=1/z_1$，$\overline{z_2}=1/z_2$，$\overline{z}=1/z$代入(7)的右边，经化简后，得出

$$m=\frac{1}{2}\left(z_1+z_2+z-\frac{z_1z_2}{z}\right).$$

在此，引进记号

$$s_1=z_1+z_2+z_3,\quad s_2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2,\quad s_3=z_1z_2z_3,$$

则m可以写成

$$m=\frac{1}{2}\left(s_1-z_3+z-\frac{s_3}{zz_3}\right).$$

上式双方取共轭

$$\overline{m}=\frac{1}{2}\left(\overline{s_1}-\overline{z_3}+\overline{z}-\frac{\overline{s_3}}{\overline{zz_3}}\right),$$

由于$\overline{s_1}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}=\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}=\dfrac{s_2}{s_3}$,

$$\overline{s_3}=\overline{z_1z_2z_3}=\frac{1}{z_1z_2z_3}=\frac{1}{s_3},$$

可得$\overline{m}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{s_2}{s_3}-\dfrac{1}{z_3}+\dfrac{1}{z}-\dfrac{zz_3}{s_3}\right)$,

由此可知 $zm-s_3\overline{m}=\dfrac{1}{2z}(z^3+z^2s_1-zs_2-s_3)$.

上式右边仅含s_1, s_2, s_3,所以关于z_1, z_2, z_3是对称的. 因此,若用复数l, n分别代表垂足D, E, 可知$zl-s_3\overline{l}=zn-s_3\overline{n}=zm-s_3\overline{m}$.

于是,考察行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ l & n & m\\ \overline{l} & \overline{n} & \overline{m}\end{vmatrix},$$

当我们先用$(-s_3)$去乘它的第三行,再用z乘第二行加到第三行去,得到三个相等的复数,因此与第一行成比例,这就是说

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ l & n & m\\ \overline{l} & \overline{n} & \overline{m}\end{vmatrix}=0,$$

回忆起用复数表示三角形的面积的公式,立刻知道:三点l, n, m所成的三角形的面积为零,这就是说$\triangle DEF$是退化了的三角形,即D, E, F三点共线.

这样就证完了西摩松定理.

习 题 24

1. 复平面上的三点 A,B,C 分别表示复数 z_1，z_2，z_3，$\triangle ABC$是一等边三角形的顶点的必要充分条件是

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2.$$

2. 复平面上的六点A，B，C，D，E，F分别表示复数 z_1,z_2,z_3,w_1,w_2,w_3. 证明：$\triangle ABC$与$\triangle DEF$直接相似的必要充分条件是

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=0.$$

3. 利用第 2 题证明正向正三角形应满足的等式(2).

4. 复平面上的六点A，B，C，D，E，F分别表示复数z_1，z_2，z_3，w_1，w_2，w_3，$\triangle ABC$及$\triangle DEF$都是正三角形. 求证：线段 AD，BE，CF 的中点构成一个正三角形.

5. 如果$\triangle ABC$，$\triangle DEF$，$\triangle GHI$ 都是正三角形，那么$\triangle ADG$，$\triangle BEH$，$\triangle CFI$的重心作成一个正三角形.

6. 如图24-5，设A,B,C,D四点分别表示复数a,b,c,d，如果A,B,C,D四点共圆，求证：$\arg\left(\dfrac{d-a}{b-a}\right)+\arg\left(\dfrac{b-c}{d-c}\right)=\pi$.

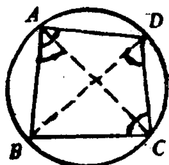


图 24-5

7. 利用上题的结果证明托勒密定理：设四边形$ABCD$内接于圆，则

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD.$$

8. (推广的托勒密定理)对一般的四边形$ABCD$，求证：

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC\geqslant AC\cdot BD.$$

第25讲　反证法(一)

苏　淳

反证法是一种间接的证题方法，在数学上使用得相当普遍．当一些命题不易从正面直接证明时，人们便往往采用反证法．

所谓反证法，就是首先假定所要证明的结论不成立，然后再在这个假定下进行一系列合乎逻辑的推理，直到得出一个矛盾的结论来，并据此推翻原先的假定，从而确认所要证明的结论成立．这里所说的矛盾，具有多重的含义，可以是与题目中所给的已知条件相矛盾；也可以是与数学中已知的公理、定理或定义等相矛盾；还可以是与日常生活中公认事实相矛盾；甚至可以是从两个不同的角度进行推理所得出的结论之间相互矛盾．总之，寻找矛盾是运用反证法证题时的核心目标之所在．而在寻找矛盾的过程中所作的各种推理，则除了出发的大前提可能不真之外，推理的本身则无论是在逻辑上还是在所依据的原理上都必须是正确的和无懈可击的．因为只有这样，我们才有理由将矛盾的产生归咎于假设的错误，因而也才有理由推翻这个假设，从而确认所要证明的结论．

下面先来看一些例题．

例1　今有有限个砝码，它们的总重量是1千克．将它们分别编上号码：1号、2号、3号、…．证明，从中必可找到一个号码为n号的砝码，它的重量严格大于$\frac{1}{2^n}$千克．

显然，要正面找出这个砝码是困难的，事实上我们根本就无从下手，所以我们还是来从反面考虑为宜．

证 假定不存在这样一个号码 n，能够使得相应的砝码重量严格大于$\frac{1}{2^n}$千克．那么就有：1号砝码的重量不超过$\frac{1}{2}$千克，2号砝码的重量不超过$\frac{1}{2^2}$千克，3号砝码的重量不超过$\frac{1}{2^3}$千克，…．由于这些砝码共有有限个，因此它们的重量之和小于1千克，但这是与已知条件相矛盾的．所以一定存在具有所述的性质的号码n．

在这里，我们便得到了一个与已知条件相违背的矛盾．

例2 已知在20个城市之间共辟有172条航线．证明，利用这些航线，可以从其中任何一个城市飞抵其余任何一个城市（包括中转后抵达）．

同上例不同，这里不是要证明存在某个对象具有某种性质，而是要证明每一个对象都具有共同的性质．但是却同上例一样，无从从正面考虑起，于是我们也来采用反证法．

证 假设其中存在某个城市A，由它仅能飞抵$n<19$个城市．我们将所有的城市分为两个集合：将A及由A可以飞抵的n个城市归入集合X，将A所不能飞抵的$19-n$个城市归入集合Y．于是在分属集合X与集合Y的任意两个城市之间都没有航线相连(否则由A即可以经过中转而飞抵属于集合Y的城市)．这样一来，航线的总数目就不应超过

$$C_{20}^2-(n+1)(19-n)=190+(n-19)(n+1)$$

条．注意到$0\leqslant n\leqslant 18$，对这样的整数n，显然

$$(n-19)(n+1)\leqslant -19.$$

于是就有$190+(n-19)(n+1)\leqslant 171$条，这是与共有172条航线的事实相矛盾的．可见不存在所述的城市A，即是说由其中任一城市都可飞抵其余任何一个城市．

在这里，我们同样是得到了一个与题目中的已知条件相违背

的矛盾．不过在思路的发展上略较例1复杂：通过了构造两个集合来找出矛盾．

例3 证明，任何3个实数都不可能同时满足下列3个不等式：

$$|x|<|y-z|,\quad |y|<|z-x|,\quad |z|<|x-y|.$$

同例2一样，这里要求证明所有的对象都具有某种共同的性质．我们仍用反证法来证明．

证 假设有某3个实数x，y，z可以同时满足上述3个不等式．我们来将这3个不等式的两端都同时平方，然后分别移项和分解因式，即得

$$(x-y+z)(x+y-z)<0,$$
$$(y-z+x)(y+z-x)<0,$$
$$(z-x+y)(z+x-y)<0.$$

再将所得到的这样3个不等式相乘，就有

$$\{(x-y+z)(x+y-z)(-x+y+z)\}^2<0,$$

而这显然是不可能的．所以任何3个实数都不能同时满足题目中所列出的3个不等式．

在这里，我们先通过平方、移项、分解因式，得到了3个不等式，从它们身上我们还看不出有什么毛病来．但是一旦把它们相乘，矛盾便暴露无遗了．这种通过相乘来暴露矛盾的手法，是一种常用的手法，我们还将在后面作详细介绍．本例中，我们得到的是一个与人所共知的数学基本知识——任何实数的平方非负——相违背的矛盾．对于这类性质的矛盾，我们通常采用“这是不可能的”之类的说法，以强调其荒谬性．

例4 设有长度分别为a_1，a_2，a_3，a_4和a_5的5条线段．今知其中任何3条都可以组成一个三角形．证明，其中必有锐角三角形．

同例1一样，这里也是要求证明存在某个对象具有所述的特

殊性质，我们当然也无法具体地指出这个对象来，因此还是采用反证法为妥.

证 为便于叙述起见，不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5$. 并设由它们中的任何 3 条组成的都不是锐角三角形. 于是借助余弦定理立即可见：

$$a_3^2 \geqslant a_1^2 + a_2^2,\quad a_4^2 \geqslant a_2^2 + a_3^2,\quad a_5^2 \geqslant a_3^2 + a_4^2.$$

因而就有

$$\begin{aligned} a_5^2 &\geqslant a_3^2 + a_4^2 \geqslant (a_1^2 + a_2^2) + (a_2^2 + a_3^2) \\ &\geqslant a_1^2 + 2a_2^2 + (a_1^2 + a_2^2) = 2a_1^2 + 3a_2^2. \end{aligned}$$

注意到 $a_1^2 + a_2^2 \geqslant 2a_1a_2$，代入上式，即得

$$a_5^2 \geqslant 2a_1^2 + 3a_2^2 > a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 = (a_1 + a_2)^2.$$

也就是 $a_5 > a_1 + a_2$. 但这是不可能的，因为 a_1, a_2 和 a_5 既然是一个三角形的 3 边之长，就应当满足 $a_5 < a_1 + a_2$ 这个众所周知的关于边长的不等式. 所以在由这些线段所组成的三角形中必有锐角三角形.

在这里，我们也同样是得到了一个違背人所共知的数学基本知识的矛盾，因而采用了“这是不可能的”的语句以强调其荒谬性.

通过上述 4 个例题，我们共接触到两种类型的宜于用反证法来证明的问题：一类是要证明“存在某个对象具有某种性质”，当我们无法从正面找出它们时，便从反面来考虑它们，提出诸如“每一个对象都不具备这种性质”的假设，例如上述的例1和例4；还有一类则是要证明“每一个对象都具备某种共同的性质”，当我们不易从正面予以证明时，便从反面提出“存在某个对象不具备这种性质”的假设，例如上述的例 2 和例 3. 从所得到的矛盾来看，我们也已接触到两种不同性质的矛盾：一类是与题目中的已知条件相矛盾；一类则是与周知的数学基本知识相矛盾. 后面我们还将看到一些可用反证法来解答的其他问题类型以及一些其他

性质的矛盾．在这里我们需要提请读者考虑的是：在提出了与题目的结论相反的假设之后，怎样才能合理地发展思路，以便尽快地找出矛盾来呢？这里面是否有着某些规律可循？对这些问题我们将留在下一讲中来谈．

现在我们来看一个例题，它在提出假设结论方面很具有些启发性．

例5 设凸五边形 $ABCDE$ 的各边相等，且有 $\angle A\geqslant\angle B\geqslant\angle C\geqslant\angle D\geqslant\angle E$，证明它是一个正五边形．

证 显然我们只须证明它的5个内角相等．为了便于证明起见，我们将分两步进行：首先证明$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$，然后证明$\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$，再将这两者结合得出所欲证明之结论．

先设$\angle A>\angle D$．我们来观察等腰三角形ABE和DCE，显然它们具有相同的腰长，而因顶角 $\angle A>\angle D$，故知它们的底边和底角不等，且应有

$$BE>CE,\ \angle EBA<\angle ECD.$$

我们再来观察$\triangle EBC$，由于$CE<BE$，故知

$$\angle EBC<\angle ECB.$$

综合上述结论即得

$$\angle B=\angle EBA+\angle EBC<\angle ECD+\angle ECB=\angle C,$$

而这是与$\angle B\geqslant\angle C$的已知条件相矛盾的，故知必有$\angle A\leqslant\angle D$．结合已知条件即得$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$．

类似地，再设$\angle B>\angle E$，于是可导出$\angle C<\angle D$的矛盾来，而知必有$\angle B=\angle C=\angle D=\angle A$．

综合上述两步，即知凸五边形$ABCDE$的内角全都相等．又因它的各边全都相等，知其确为正五边形．

在这里，虽然我们要证的是5个内角全都相等，而我们在做法上却都不是假定"其中有某两个角不等"，也不是借助已知条件

“$\angle A \geqslant \angle B \geqslant \angle C \geqslant \angle D \geqslant \angle E$”一上来就假定“$\angle A > \angle E$”，而是从便于处理的角度出发，将论证分为两步进行．由此可见，反证法作为一种实用的证题方法，其本身并没有规定出如何使用它的固定程式，而仍然是要求我们因题而异，对具体使用步骤作灵活的处理的．下面我们再来看两道例题．

例6 试问，能否在平面上放置10000条线段，使得每一条线段的端点都严格地位于其他线段的内部？

这是一道以疑问的形式出现的题目，题目的本身并没有就问题的答案给出任何结论．处理这类问题的一种有效办法，就是先假定这种放置是可能的，然后再看看能否推出矛盾来．如果推出了矛盾，则说明对结论应予否定．如果推不出矛盾，则再从正面看看能否找到放置规律，并核实这种结论是否真的能够肯定．下面我们就来进行这种处理．

证 假定可以这样在平面上放置10000条线段，使它们的20000个端点全都严格地位于其余线段的内部．我们来取定一点O，并找出20000个端点中离点O最远的点A来（如果这样的点有好几个，则任取其中一个作为A点），于是平面上再没有比点A到点O的距离更远的上述线段的端点了．但是，由于点A严格地位于另一线段BC的内部，所以点A是$\triangle OBC$的边BC上的内点，根据周知的事实知有$OA < \max\{OB, OC\}$，也就是说点B和点C中有一点比点A到点O的距离更远，这与我们对点A的选取相矛盾．可见不能在平面上这样放置10000条线段．

就这样，我们借助于反证法为这个问题寻得了答案，其中所找到的矛盾，是与我们起先对点A的性质的规定相违背的．

例7 欲从无限长的纸带上剪出任何形状的面积为1的三角形．试问，纸条的宽度至少应是多少？

这也是一个以疑问的形式出现的问题．不过由于需对纸宽给出一个估计，所以我们可以先从一些特殊形状的三角形看起．而

正是这种考虑方法可以为我们提供使用反证法的基础.

我们先来看面积为 1 的正三角形，容易算出它的边长为 $a=2/\sqrt[4]{3}$，高为 $h=\sqrt[4]{3}$. 因此令人猜测纸宽至少应为 $\sqrt[4]{3}$. 为此，我们先来看看纸宽能否小于 $\sqrt[4]{3}$？

假设从纸宽小于 $\sqrt[4]{3}$ 的无限长的纸带上可以剪出面积为 1 的正三角形 ABC，则显然 $\triangle ABC$ 的任何一边都不能在纸带的边上. 我们来将该正三角形的 3 个顶点都投影到纸带的边上，并假定 B 点的投影 B_1 位于 A 点和 C 点的投影 A_1 和 C_1 之间. 连 BB_1，设 BB_1 与 AC 交于 M 点，则显然 $\triangle ABC$ 的高不超过 BM，而 BM 不大于纸条的宽度，所以 $\triangle ABC$ 的高小于 $\sqrt[4]{3}$，从而 $\triangle ABC$ 的面积小于1，导致矛盾. 所以纸带宽度不得小于 $\sqrt[4]{3}$.

那么纸带宽度为 $\sqrt[4]{3}$ 是否就够了呢？这就相当于问："面积为 1 的三角形中是否都有一条边上的高不超过 $\sqrt[4]{3}$？"那么当然也就相当于问："是否都有一条边不小于 $2/\sqrt[4]{3}$？"我们下面就来回答这个问题.

假设存在某个面积为 1 的 $\triangle ABC$，它的 3 边之长 a，b，c 都小于 $2/\sqrt[4]{3}$. 我们以 α 记它的最小角，并设 $\angle C$ 就是它的最小角，于是有 $\angle C=\alpha\leqslant 60°$. 这样一来，就有

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin\alpha<\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1,$$

从而与 $S_{\triangle ABC}=1$ 的事实矛盾. 可见每个面积为 1 的三角形中都至少有一边不小于 $2/\sqrt[4]{3}$.

综合上述即知纸带的宽度至少可为 $\sqrt[4]{3}$.

在这个问题的解答中，我们两次使用了反证法. 从这些使用中，显然可以使我们窥见反证法对解决诸如此类问题所具有的威力.

习 题 25

1. 设圆的两条非直径的弦 AB 和 CD 相交于一点，证明，它们不能互相平分.

2. 四边形$PQRS$的四条边PQ，QR，RS 和 SP 上各有一点为 A，B，C，D．已知$ABCD$是平行四边形，而且它的对角线以及$PQRS$的对角线(共四条线段)都相交于同一点O，证明$PQRS$也是平行四边形.

3. 已知$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$是 $2n$个正数，且 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$，$b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=1$．证明：分数$\frac{a_1}{b_1}$，$\frac{a_2}{b_2}$，$\cdots$，$\frac{a_n}{b_n}$中至少有一个不大于1.

4. 设 $a_1,\cdots,a_8$ 均为正数，有

$$a_1+\cdots+a_8=20，\quad a_1\cdots a_8=4，$$

证明：$a_1,\cdots,a_8$中至少有一个数小于1.

5. 设有 17 个自然数：a_1，a_2，$\cdots$，a_{17}．现知 $a_1^{a_2}=a_2^{a_3}=a_3^{a_4}=\cdots=a_{16}^{a_{17}}=a_{17}^{a_1}$．证明$a_1=a_2=\cdots=a_{17}$.

6. 试问，能否依次写出 50 个实数，使得其中任意 17 个相连的数字之和为正，而任意10个相连数字之和为负?

7. 将一张 8×8 的方格表的每一小格的中心标出，共得 64 个点．试问，能否作出 13 条直线，使它们都不通过上述 64 个点中的任何一点，却把这64个点全都彼此隔开?

8. 在平面上给出了 5 个点，已知其中任意 4 点中都有某 3 个点构成一个三角形．证明，这 5 个点中必有某4个点构成一个有一个角为60°的菱形.

9. 平面上的每一个点都被随意地涂成了红色或蓝色，并且其中既有红点又有蓝点．证明，对于任意给出的正数 r，在平面上都能找出一个红点和一个蓝点来，它们之间的距离恰好为 r.

第26讲 反证法（二）

苏 淳

在第25讲中，已经谈到使用反证法证题时如何提出假设的一般性原则，并且举例说明了需要作灵活处理的一些场合．在这一讲中，将着重谈谈在假设提出之后，如何发展思路的问题，并力图找出一些规律性的东西来．

例1 在空间中给出了8个已知点，其中任何4点都不共面，今知以它们为端点连有17条线段．证明，这些线段至少形成了一个三角形．

我们无从具体找出这个三角形，因此以从反面来考虑为宜．

证 假设这17条线段没有形成任何一个三角形．并设A点是这8个点中连出线段的数目最多的点．假定由A共连出了n条线段，它们分别连向B_1，B_2，…，B_n．于是在B_1，B_2，…，B_n中的任何两点之间都没有线段相连(否则就会形成三角形了)．这样一来，即使从其余$7-n$个点中的每个点也都连出了n条线段，那么线段的总数目也仅有 $n+(7-n)n=(8-n)n\leqslant\frac{8^2}{4}=16$条，而与已知条件中的17条相矛盾．可见这些线段至少形成了一个三角形．

在这个例题的推理过程中，有两点值得注意之处：一是抓住了点A这个连出线段最多的点做文章；二是从考察线段总数目中找出了矛盾．可以说正是这样两个关键的步骤保证了思路的正确发展．回顾第25讲中所见过的几个例子，可以发现它们也多少有着类似的步骤．比如例6中的点A和例7中的正三角形，就是我们抓住来做文章的特殊对象．而例1、例2则都是通过考察总和来找出矛盾的，至于例3，则是通过考察总乘积达到了暴露矛

盾的目的．这些例题都说明：注意考察问题中的特殊对象，注意考察事物的某种总的数量关系，往往会有助于揭露矛盾．

例2 在平面上分布着若干个已知点，它们中任何两点之间的距离都不相同．今将其中每一个点都同离它最近的点连结起来．试问，由此可以连成一条闭折线吗？

这一题与第25讲的例6类似，一时尚无从断言“能还是不能”．于是便首先假定能够连成一条闭折线，再来看能否找出矛盾．

证 观察闭折线中的最长线段AB，并假定它的两端分别与CA和BD相连．由于这些点间的距离各不相同，所以知$CA<AB$，这表明B不是离A最近的点；同时又有$BD<AB$，因而A也不是离B最近的点．这就说明A，B之间不可能有线段相连，导致矛盾．可见不可能连成闭折线．

在这里，线段AB就是一个供我们作文章的特殊对象．

例3 由凸多边形内部任意一点向它的各边引垂线．证明，至少有一个垂足位于它的某条边上，而不都是位于各边的延长线上．

我们当然也无从具体找出这个垂足来，所以仍宜采用反证法．

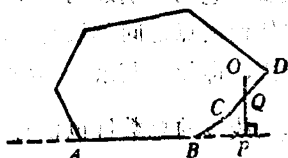


图 26-1

证 如图26-1，假设由凸多边形的内部一点O向各边所作垂线的垂足均位于边的延长线上．设AB是凸多边形的距离O点最近的边，作出经过AB的直线，并由O点向该直线作垂线OP，P为垂足，于是P点位于线段AB之外，当然也就位于多边形之外．这样，线段OP必与多边形的某条边相交，该边显然不是AB，设它为CD，并记OP与CD的交点为Q，于是有$OQ<OP$．但显然由O到CD的距离小于OQ，因而也就小于它到AB的距离OP，这与我们对AB边的选择相矛盾．可见垂足P必位于AB边的内部．

以上都是一些通过考察特殊对象来找出矛盾的例子．下面再

来看几个通过考察事物中的某种总的数量来揭露矛盾的例子.

例 4 设数字 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 是正整数 1, 2, …, $2n$ 的任意一种排列. 将每个数字a_k都与其脚标k相加, 得到和数$k+a_k$. 证明, 在所得的 $2n$ 个和数中至少有两个被 $2n$除时的余数相同.

由于无法具体找出这两个和数来, 所以我们采用反证法.

证 假定这 $2n$个和数被 $2n$ 除的余数各不相同, 则显然可知这 $2n$ 个余数的集合重合于$\{0, 1, \cdots, 2n-1\}$. 又显然这 $2n$ 个余数之和同这 $2n$ 个和数的自身之和被 $2n$除的余数相同. 然而

$$S=(1+a_1)+(2+a_2)+\cdots+(2n+a_{2n})=(1+2+\cdots+2n)$$
$$+(a_1+a_2+\cdots+a_{2n})=2(1+2+\cdots+2n)=2n(2n+1)$$

是 $2n$ 的倍数; 而这 $2n$ 个余数的和却为

$$S_1=0+1+2+\cdots+(2n-1)=n(2n-1),$$

显然 S_1 不是 $2n$ 的倍数. 上述两桩事实是矛盾的, 可见这 $2n$ 个余数中至少有两个是相同的.

这个例题同第25讲的例 1 和例 2 不同: 在那两个例题的条件中明确地给出了总和, 从总和去寻找矛盾是很自然的, 在这个例题中, 却没有这种条件. 我们之所以想到要从总和去寻找矛盾, 完全是凭借对于数的整除性质的了解和有关的解题经验的启发. 从这一点上说, 这道例题的处理手法很象上一讲中的例3, 即主动去考察事物中的某种总的数量关系, 以求得对有关矛盾的揭露.

例 5 能否被正整数 1, 2, 3, …, 33 分成 11组, 每组 3 个数, 且使得每组中都有 1 个数等于其余两个数的和?

解 假设能够分得出来, 于是各组数字的和都是偶数, 从而 11组数字之和应为偶数, 但事实上 $1+2+3+\cdots+33$ 却是奇数, 这是一个矛盾. 可见所说的分组是不能实现的.

例 6 能否在凸多边形内引出一些对角线, 使得有一个顶点处引出的是奇数条, 而其余顶点处引出的都是偶数条对角线?

解 假设能够这样来引出对角线, 我们来考察一下自各顶点

所引出的对角线的数目之和S．显然，S是若干偶数与一个奇数之和，所以是奇数．但另一方面，由于每一条对角线都连着两个顶点，所以在求和过程中每一条对角线都在S中被计算了两次，可见S是所引出的对角线的总数目的两倍，因此又应当是偶数．上述两个结论是矛盾的，可见不能这样来引对角线．

上述两个例题的解题思路很相似，即都是通过求和来考察总数量的奇偶性质．奇偶性是整数的一个重要性质，在解题中经常起重要作用，应当引起注意．下面再看一个例子．

例7 设a，b，c都是奇数．证明，一元二次方程$ax^2+bx+c=0$没有有理根．

证 假设方程有有理根$x_0=\frac{p}{q}$．不失一般性，可认为$\frac{p}{q}$是既约分数，于是p和q不全是偶数．

假定p是偶数，则因$ax_0^2+bx_0+c=0$去分母后变为$ap^2+bpq+cq^2=0$，而ap^2+bpq是偶数，故知cq^2也应为偶数．但因c是奇数，从而q^2亦即q应为偶数．这样，p和q皆为偶数，而与关于$x_0=\frac{p}{q}$是既约分数的假设相矛盾．可见p必为奇数．

假定q是偶数，则同样可得出矛盾．可见q也必为奇数．

但如果p和q都是奇数，则ap^2，bpq，cq^2都是奇数，从而$ap^2+bpq+cq^2\neq 0$，亦即$a\left(\frac{p}{q}\right)^2+b\frac{p}{q}+c\neq 0$，这又与关于$x_0=\frac{p}{q}$是方程的根的假设相矛盾．综览上述各条即知方程不可能有有理根．

这里再次用到了对于整数的奇偶性分析．不过由于命题本身即已经是和式的形式，所以用不着再另行求和了．

本题还有一种解法，它不是通过对奇偶性（即对于2的整除性），而是通过对于8的整除性来考察问题的：

我们知道，为了方程$ax^2+bx+c=0$具有有理根，其充分必要条件其是判别式$\triangle=b^2-4ac$是完全平方数．但由于a,b,c都是奇数，故知$\triangle$一定是奇数．现假设$\triangle$是完全平方数，于是就有$b^2-4ac=(2n+1)^2$，整理后即为$b^2-1=4n(n+1)+4ac$．
我们先来观察上式右端．易知n与$n+1$必为一奇一偶，故知$4n(n+1)$是8的倍数；而$4ac$则只能被4整除不能被8整除．所以$4n(n+1)+4ac$不是8的倍数．注意到b为奇数，记$b=2k+1$，就有$b^2-1=4k^2+4k=4k(k+1)$，可见等式的左端是8的倍数．上述两个结论是矛盾的．可见原方程不可能有有理根．

整除性也是整数的一种重要属性，在各种与整数有关的问题中经常会被用到．

例8 证明，不存在正整数a，b，c和n，使得$a^2+b^2+c^2=2^nabc$．

证 假设存在这样的整数a,b,c和n，可使所述的等式成立．因2^nabc为偶数，则a，b，c中或者全为偶数，或者两奇一偶．

先看a，b，c为两奇一偶的情形．不失一般性，可设

$$a^2+b^2+c^2=4(k^2+k+m^2+m+l^2)+2,$$

于是有$a=2k+1$，$b=2m+1$，$c=2l$．
可见等式的左端是偶数，但不是4的倍数；但此时$2^nabc=2^{n+1}abl$（n为正整数）却一定是4的倍数．由此导致矛盾．

再看a，b，c都是偶数的情形．此时有

$$a=2^{k_1}(2r_1+1),\quad b=2^{k_2}(2r_2+1),\quad c=2^{k_3}(2r_3+1),$$

其中r_1,r_2,r_3为非负整数，k_1,k_2,k_3为正整数，不妨设$k_1\geqslant k_2\geqslant k_3>0$，于是就有$a^2+b^2+c^2=2^{k_3}[2^{2(k_1-k_3)}(2r_1+1)^2$

$$+2^{2(k_2-k_3)}(2r_2+1)^2+(2r_3+1)^2]$$

$$2^nabc=2^{n+k_1+k_2+k_3}(2r_1+1)(2r_2+1)(2r_3+1).$$

比较上述两式中的指数，即可发现

$$n+k_1+k_2+k_3>n+(k_2+k_3)\geqslant 2k_3+1,$$

可见等式$a^2+b^2+c^2=2^n abc$决不能成立。

综合上述，即知命题的断言成立。

通过上述例题，我们已经看到了在运用反证法证题中的思路发展上的多样性。但是，无论是求和、求积、还是考察奇偶性和整除性，都是通过总的方面来把握事物中的数量规律．由此可见，学会从整体性方面来看问题的思维方法，对于掌握反证法是极为重要的．下面再来看两个例题．

例9 将正整数1至100随意填入10×10的方格表（即表共由10行组成，每行10个方格），每格1数．证明，必有某两个相邻方格（即具有公共边的方格）中所填数字之差不小于6．

证 假设命题的结论不成立，即可以找到一种填法使得每两个相邻方格中所填数字之差都不超过5．我们来观察那个与1同在一行、与100同在一列的数字a（横为行竖为列）．由于在a与1之间也至多间隔8个方格，故知必有$a\leqslant1+9\times5=46$；而在a与100之间也至多间隔8个方格，所以又有$a\geqslant100-9\times5=55$．上述两个结论显然是矛盾的，可见必有某两个相邻方格中所填数字之差不小于6．

从这个例题中，我们体会了既从特殊对象入手、又从全面考虑问题的思想原则，应当说是颇有启发性的．

例10 有一个$n\times n$的方格表，先允许从中任意选择$n-1$个方格涂为黑色，然后再逐步地将那些至少与两个已涂黑的方格相邻的方格也涂为黑色．证明，不论怎样选择最初的$n-1$个格，都不能按这样的法则涂黑所有的方格．

证 假设能够涂黑所有的方格，那么作为黑色区域来说，方格纸的边界就是区域的边界．如果将每个小方格的边长记作1，那么黑色区域的边界总长就应达到$4n$．但是，在一开始时，黑色区域仅包括$n-1$个小方格，即使它们都互不相邻，那么区域的边界长度也仅为$4(n-1)$．而在以后的逐步扩大黑色区域的面积的

过程中，由于只能涂黑那些至少已与黑色区域有两条公共边的方格，因此面积的扩大并不带来边界总长度的增加，从而边界总长度将始终不会超过 $4(n-1)$，上述两桩事实是相互矛盾的，可见我们不能按照法则涂黑所有的方格．

这里，不是抓住最初的 $n-1$ 个方格的分布，而是考察黑色区域的边界总长度，自然也是一种从整体性质来暴露矛盾的手法．

习 题 26

1．设 a_1，a_2，…，a_{4n} 是自然数1，2，…，$4n$ 的任意一种排列．记 $b_1=|a_1-a_2|$，$b_2=|a_3-a_4|$，…，$b_{2n}=|a_{4n-1}-a_{4n}|$；再记 $c_1=|b_1-b_2|$，$c_1=|b_3-b_4|$，…，$c_n=|b_{2n-1}-b_{2n}|$，……．如果在某一步上仅剩了奇数个数字，则将0补入其中，作为数组的最后1个数字，再继续作下去．直到最后仅剩下1个数字为止．证明，最后这个数字必为偶数．

2．试问，能够把一个凸多形边分割为有限个非凸的四边形吗？

3．一空间中有一个凸多面体，现知它的所有顶点都是整点（即3个坐标值都是整数的点），此外，无论是多面体的内部、面上或棱上都再没有其他整点．证明，多面体的顶点数目不超过8个．

4．证明，在十进制之下，数 2^n+1974^n 的位数与 1974^n 的位数相同．

5．证明，对于任何13边形，都存在着一条直线只经过它的一条边；而对于 $n>13$ 边形，这个断言却不正确．

6．有一个无穷数列 a_1，a_2，…，a_n，…，其中每一项都是正整数，而且每一项都是在前一项的末尾再添加一位数字后得到的，不过所添加的一位数字都不是9．证明，这个数列中至少有两项是合数．

7．自 2^{1989} 的第一位数和第二位数之间切开，把它变为两个数字（其中一个是一位数，另一个是多位数），再将这两个数字相加．然后再对加得的和数按上述办法处理．如此下去，一直进行到所得的和数是一个十位数为止．证明，这个十位数中至多有两个数位上的数码相同．

第 27 讲　数学归纳法的基本形式

苏　淳

数学归纳法是一种常用的数学方法，用途很广，一些与正整数或非负整数 n 有关的命题，往往都可以通过数学归纳法来加以证明．

数学归纳法作为一种归纳性方法，在证题中需要从两个方面入手．一个方面就是针对一些简单而具体的场合，实际地检验命题是否成立．这些检验一般是容易完成的，因为这时只需将 n 的一些具体值，通常是将 $n=1$，代入所要检验的命题，简单地算一算就可以了．但是这些检验却是必不可少的，因为只有通过这些检验，我们才有理由承认所要证明的命题是有可能成立的，因而才具备了进行归纳的基础．第二个方面，则是要在"命题已对较小的 n 值成立"的假设下，利用命题中的条件、数学中的原理和方法，并结合生活中的公认的事实，进行严密而正确的推理，以推出"命题对较大的 n 值也成立"的结论．这个方面的检验，在数学上通常叫做归纳过渡，这是归纳法应用中的更重要并且也更具难度的一个方面．在数学归纳法的基本形式之下，这一步通常是在"假设命题已对 $n=k$ 成立"的前提下，推出"命题对 $n=k+1$ 也成立"的．这一步之所以重要，其原因就在于只有通过它，才能确保这一系列许多个甚至无限个命题都是成立的．

下面是一些运用归纳法来证题的简单例子．

例 1　设正数 a_1，a_2，…构成了等差数列，证明

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}$$

$$=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

证 记该等差数列的公差为d，由于数列的每一项皆为正数，知$d\geqslant 0$.（想一想，为什么？）如果$d=0$，则$a_1=a_2=\cdots$，知等式显然成立；故下面只要对$d>0$的情形进行证明.

当$n=2$时，有：左式$=\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}=$右式，知等式成立.

假设当$n=k\geqslant 2$时等式已成立，即有

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}+\sqrt{a_k}}$$

$$=\frac{k-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_k}}.$$

则当$n=k+1$时，我们就有

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}+\sqrt{a_k}}+\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$$

$$=\frac{k-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_k}}+\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$$

$$=\frac{(k-1)(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_1})}{a_k-a_1}+\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}$$

$$=\frac{(k-1)(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_1})}{[a_1+(k-1)d]-a_1}+\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{[a_1+kd]-[a_1+(k-1)d]}$$

$$=\frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_1}}{d}+\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{d}=\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_1}}{d}$$

$$=\frac{a_{k+1}-a_1}{d(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{k+1}})}=\frac{(a_1+kd)-a_1}{d(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{k+1}})}$$

$$=\frac{k}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{k+1}}}.$$

知此时等式仍然成立．故知对一切自然数$n\geqslant 2$，等式都成立．

在这里，首先对$n=2$验证等式是因为$n=1$时等式没有意义．而后两次强调“$n=k\geqslant 2$”及“一切自然数$n\geqslant 2$”也都是出于同一考虑．在本题的归纳过渡中（即由$n=k$时已成立的等式去推证$n=k+1$时的待证等式的过程中），我们除了运用归纳假设（即$n=k$时已成立的等式）外，还在分式的变形上进行了两次相反的操作：一次是将分母有理化，第二次则是将分母无理化．这两次变形的形式完全相反，但目的却是同样的，即都是为了利用等差数列的性质，也就是为了可以将等差数列的通项公式代入到分式中，以使等差数列的性质能够在证明中发挥出它们的作用．这是一个与等差数列有关的等式，在证明过程中要用到等差数列的性质是理所当然的．我们之所以要在分式的变形上下功夫，正是为了替它们创造出可以用武的条件．这一点，是大家在运用归纳法证题时应当注意的．

例2 设a_0，a_1，a_2，…是一个正数数列，对一切$n=0$，1，2，…，都有$a_n^2\leqslant a_n-a_{n+1}$．证明：对一切$n=1$，2，…，都有$a_n<\frac{1}{n+1}$．

证 由不等式$a_0^2\leqslant a_0-a_1$得知

$$a_1\leqslant a_0-a_0^2\leqslant a_0(1-a_0),$$

由于$a_0>0$，$a_1>0$，知$1-a_0>0$，故由上面的不等式并结合平均不等式，即得

$$a_1\leqslant a_0(1-a_0)\leqslant\frac{1}{4}<\frac{1}{2},$$

知当$n=1$时，所得的不等式成立．

假设$n=k$时不等式已成立，即有$a_k<\frac{1}{k+1}$，要证$n=k+1$时不等式也成立．

分两种情况考虑：(1) $\frac{1}{k+2}\leqslant a_k<\frac{1}{k+1}$；(2) $a_k<\frac{1}{k+2}$．

在情况(1)之下，我们有

$$a_{k+1} \leqslant a_k(1-a_k) < \frac{1}{k+1}\left(1-\frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{k+2};$$

在情况(2)之下，由于显然有 $0<1-a_k\leqslant 1$，知

$$a_{k+1} \leqslant a_k(1-a_k) \leqslant a_k < \frac{1}{k+2}.$$

所以无论何种情况，所证不等式都可对 $n=k+1$ 成立。故知对一切自然数 n，不等式都成立。

在这里，我们在实施归纳过渡时，分成了两种情况考虑，其用意当然是很清楚的：因我们要想从 $a_{k+1}\leqslant a_k(1-a_k)$ 得出关于 a_{k+1} 的上界估计，不仅需要关于"a_k 小于多少"的信息，而且需要关于"a_k 大于多少"的信息。然而这类信息既没有从归纳假设中得到，又无法从数列的本身性质中觅得，于是迫不得已，只好先对 a_k 假定有 $\frac{1}{a_{k+2}}\leqslant a_k<\frac{1}{k+1}$ (即情形(1))了。然而对剩下的情况不能扔下不管，于是便又对情形(2)给出了不同于情形(1)的另一种估计办法。这种需要区分情况，以分别采用不同方法实现过渡的例子，在数学归纳法的使用中是屡见不鲜的，当引起读者们的注意。

例3 已知 a，b 为正实数，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$。

试证：对每一个 $n\in N$，都有

$$(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant 2^{2n}-2^{n+1}.$$

证 当 $n=1$ 时，左式 $=0=$ 右式，知命题成立

假设当 $n=k$ 时，不等式成立，即有

$$(a+b)^k-a^k-b^k\geqslant 2^{2k}-2^{k+1}.$$

那么当 $n=k+1$ 时，

$$\text{左式}=(a+b)^{k+1}-a^{k+1}-b^{k+1}$$

$$=(a+b)[(a+b)^k-a^k-b^k]+a^kb+ab^k.$$

由于$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，的 $ab=a+b$；又因

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant 4,$$

即知 $ab=a+b\geqslant 4$. 这样一来，便知

$$a^kb+ab^k\geqslant 2\sqrt{a^kb\cdot ab^k}=2\sqrt{(ab)^{k+1}}$$

$$\geqslant 2\cdot 2^{k+1}=2^{k+2}.$$

根据这一事实以及归纳假设，即得

$$左式=(a+b)[(a+b)^k-a^k-b^k]+a^kb+ab^k$$

$$\geqslant 4(2^{2k}-2^{k+1})+2^{k+2}$$

$$=2^{2k+2}-2^{k+2}=右式.$$

所以对一切 $n\in N$，所证的不等式都成立.

这是 1988 年全国高中数学联赛第一试中的一道试题. 遗憾的是，尽管这只是第一试中的试题，能够完满地给出解答的考生却并不很多，反映了对数学归纳法这一基本的数学证题方法的掌握情况尚不能令人满意.

在这里，我们首先将左式变形为

$$(a+b)[(a+b)^k-a^k-b^k]+a^kb+ab^k,$$

使其中出现$(a+b)^k-a^k-b^k$，显然是为了能利用归纳假设. 但是由于即使在这里利用了归纳假设，表达式中仍然还会有字母 a 和 b 存在，可是右式中却没有这些字母. 可见我们还应当通过利用题目中所给的条件"$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$"来设法将这些字母通过等量或不等量的转化，使其与 2 的方幂建立起联系来. 正是基于对这种情况的考虑，才使得我们在使用归纳假设之前，又对 $a+b$ 和 a^kb+ab^k 的值在题目所给的条件之下先作了一番细致的分析；正是这种分析的结果同归纳假设的综合运用帮助我们顺利地实现归纳过渡. 可见要想做好这道题，并不是简单地用一用归纳假设就可

以奏效的．

综合上述三个例题的解题经验，可以概述成如下几条：

1．为了能顺利实现归纳过渡，一定要借助于归纳假设，因此应当为使用归纳假设创造条件；

2．命题的成立一般离不开题目中的条件，因此在归纳过渡中也离不开这些条件的帮助，为了能用好这些条件，往往需要对它们作一番细致的剖析（如象例3中所作的那样），有时还需要对一些代数式或命题作反复的变形（如象例1中所作的那样）；

3．除了上述两条之外，其他学科中的知识、日常生活常识、数学中的基本知识以及各种数学技巧，都可以在帮助实现归纳过渡中发挥作用，因此一定要注意对它们的灵活应用（如象例2中那样分为两种情况考虑）．

我们下面再来看几个例子，以期加深对上述3条经验的体会．

例4 设有 2^n 个球分成了许多堆，我们可以任意选取甲、乙两堆来按如下规则挪动：若甲堆的球数 p 不少于乙堆的球数 q，则从甲堆中拿出 q 个球放入乙堆，这算是挪动了一次．证明可以经过有限次挪动把所有的球并成一堆．

这是1963年北京市的一道竞赛题，由于很具代表性，我们愿把它介绍给大家．

当 $n=1$ 时，只有两个球：或许它们原来就在同一堆中；或许它们分成两堆，每堆一个球，于是只要挪动一次即可并成一堆．知命题成立．

假设 $n=k$ 时命题成立，要证 $n=k+1$ 时命题也成立．如上所说，这里至关重要的是要创造条件利用归纳假设．可是，当 $n=k$ 时，有 2^k 个球，当 $n=k+1$ 时，却有 2^{k+1} 个球了，球数多出了一倍，该怎样去利用归纳假设呢？以下的借助于日常生活常识的做法是非常具有启发性的：

首先，在由 2^{k+1} 个球所分出的许多堆球中，球数为奇数的

堆必有偶数个．因为如果不然，则总球数成为奇数而与事实矛盾．于是可见，可将这些球数为奇数的堆两两配对，并在每一对中的两堆球之间进行一次挪动，便可使所有这些堆中的球数都变为偶数，（想一想，为什么？）当然可能会有些堆中的球数变为0个．这时，我们再将每一堆中的球都两个两个地绑在一起视为一个“球”，于是总“球”数变为2^k个，因而可由归纳假设知它们可在有限步挪动之后全部并入一堆了．

看！这种将球两两绑为一个的日常思维方法在归纳过渡中帮了我们多大的忙！

例5 （欧拉问题）证明，对任何自然数$n\geqslant3$，数字2^n都可以表示成$2^k=7x^2+y^2$的形式，其中x和y为奇数．

本命题由著名大数学家欧拉提出．在1985年的苏联莫斯科数学奥林匹克中曾把它作为九年级（相当于我国的高中一、二年级）的试题．不言而喻，这是一道具有相当难度的试题．

当$n=3$时，只要取$x=y=1$，就有$2^3=8=7+1$，知命题成立．

假设当$n=k\geqslant3$时，存在奇数x和y，使得

$$2^k=7x^2+y^2, \tag{1}$$

要证明当$n=k+1$时，也存在奇数x和y，使相应的等式成立．

我们在这里当然不能凭空去寻找这种奇数x和y，而是要设法利用$n=k$时已有的结果．为此，我们来对$n=k$时的等式(1)作变形，令

$$\begin{aligned}2^{k+1}&=2\cdot2^k=2(7x^2+y^2)\\&=7(a_1x+a_2y)^2+(b_1x+b_2y)^2,\end{aligned}$$

于是就有

$$\begin{cases}7a_1^2+b_1^2=14,\\7a_2^2+b_2^2=2,\\14a_1a_2+2b_1b_2=0.\end{cases}$$

我们的意图就是要选择上述方程组的适当的解(a_1, a_2, b_1, b_2)，使得

$$x_0 = a_1x + a_2y,\ \ y_0 = b_1x + b_2y$$

都是奇数，并因此就有

$$2^{k+1} = 7x_0^2 + y_0^2, \tag{2}$$

而知 $n = k+1$ 时命题也成立了。

经过不太复杂的推算，可以发现，若取

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}(x+y), \\ y_1 = \dfrac{1}{2}(7x-y), \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2}(x-y), \\ y_2 = \dfrac{1}{2}(7x+y), \end{cases}$$

则都可有相应的(2)式成立。而由 x 和 y 为奇数，可知它们确为两组整数。又因

$x_1 + y_1 = 4x$ 为偶数，知 x_1 与 y_1 同奇偶；

$x_2 + y_2 = 4x$ 为偶数，知 x_2 与 y_2 同奇偶；

而　　$x_1 + x_2 = x$ 为奇数，知 x_1 与 x_2 一奇一偶。

可见在(x_1, y_1)与(x_2, y_2)中，必有一组同为奇数，于是就只要将这组奇数取为 $n = k+1$ 时的 x 和 y，就知命题也成立了。

在这里，我们在归纳过渡中运用了待定系数法，其目的仍是为了创造条件以利用归纳假设，再次印证了我们在前面总结的三条经验。

习　题　27

1．在平面上引出了 n 条直线．证明，可以用两种颜色为平面着色，使得每一个由直线所分割出的区域都着为其中的一种颜色，而每两个相邻的区域所着的颜色都不相同（具有公共边的区域称为相邻的区域）．

2．斐波那契数列的定义是：$a_1 = a_2 = 1$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$，当 $n \geqslant 3$．证明，对任何 $m \in N$，a_{5m} 都是 5 的倍数．

3．象棋比赛中每两人都比赛一次，且一定决出胜负．证明，在比赛结束

后，可将所有参赛者排成一列，使得队列中的每一个人都战胜过紧跟在他后面的那个人.

4. 考察 0 和 1 之间的所有有理数，并将所有分母不超过 n 的既约分数自小到大依次排出. 设 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 是其中任意两个相邻排列的分数. 证明 $|bc-ad|=1$.

5. 若将所有分子和分母的乘积不超过 n 的既约分数排成一列，而 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ 是其中相邻排列的两项. 证明，$bc-ad=1$.

6. 利用已知的公式 $1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$，证明，对于互不相同的自然数 a_1，a_2，…，a_n，有如下不等式成立：

$$(a_1^7+a_2^7+\cdots+a_n^7)+(a_1^5+a_2^5+\cdots+a_n^5)\geqslant 2(a_3+a_2^3+\cdots+a_n^3)^2.$$

并考虑等号能否成立.

7. 凸 $(2n+1)$ 边形的每一顶点被分别涂上红、蓝、黄三种颜色中的一种颜色，并且每两个相邻顶点所涂的颜色都不相同. 证明，可用互不相交的对角线将该 $(2n-1)$ 边形划分为若干个三角形，使每个三角形的 3 个顶点都分别涂有 3 种不同颜色.

8. 在平面上给定了 n 个点，以其中每两点作为端点皆可连得一条线段，我们把这两线段中的最长者叫做直径. 证明，在 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条连线中，直径的条数不会多于 n 条.

第 28 讲　数学归纳法的变通形式

苏　淳

在运用数学归纳法证题时，必须进行两个方面的验证，这是不能含糊的；但是在具体作法上，却可以因题而异，对两个步骤实施灵活的变通．常用的变通方式有以下几种：

一、选择合适的假设形式

在一些场合下，以"假设 $n\leqslant k$ 成立"代替"假设 $n=k$ 成立"更为方便，这时就应采用这种变通了的假设形式．

例 1　证明，任何一个正的真分数 $\frac{m}{n}$ 都可以表示成若干个互不相同的自然数的倒数之和．

虽然任何正的真分数 $\frac{m}{n}$ 都可以写成 $\frac{m}{n}=\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{\text{共 } m \text{ 项}}$，但因它们的分母都是同一个自然数，因此不合要求．所以还是用数学归纳法证明为妥．设正的真分数 $\frac{m}{n}$ 已是既约分数，对 m 进行归纳．

证　当 $m=1$ 时，不论对任何自然数 n，$\frac{m}{n}=\frac{1}{n}$ 就已是自然数 n 的倒数，知命题成立．

假设 $m\leqslant k$ 时，命题已成立，即对任何分子不超过 k 的既约真分数 $\frac{m}{n}$，都能找出若干个互不相同的自然数 t_1，…，t_l，使得

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{t_1}+\cdots+\frac{1}{t_l},$$

要证对分子值 $m=k+1$ 的既约真分数 $\frac{k+1}{n}$，命题也成立．

由于 $0<k+1<n$ 及 $(k+1,\ n)=1$，知 $n=q(k+1)+r$，

其中 q 和 r 都是正整数，且 $0<r<k+1$．这样一来，便有

$$\frac{k+1}{n}-\frac{1}{q+1}=\frac{(k+1)(q+1)-q(k+1)-r}{n(q+1)}=\frac{k+1-r}{n(q+1)}.$$

注意到 $k+1-r<k+1$，即 $k+1-r\leqslant k$，因此当将分数 $\frac{k+1-r}{n(q+1)}$ 表示为既约分数后，其分子不超过 k．故知可将它表示为若干个互不相同的自然数 $s_1, \cdots, s_v$ 的倒数之和，从而就有

$$\frac{k+1}{n}=\frac{1}{q+1}+\frac{k+1-r}{n(q+1)}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{s_1}+\cdots+\frac{1}{s_v}. \qquad (1)$$

下面只要再证 $q+1\notin\{s_1, \cdots, s_v\}$，便可断言命题对 $m=k+1$ 也成立了．用反证法，假设 $q+1\in\{s_1, \cdots, s_v\}$，于是就有

$$\frac{1}{q+1}+\frac{1}{s_1}+\cdots+\frac{1}{s_v}\geqslant\frac{2}{q+1}=\frac{2n}{(q+1)(k+1)}\cdot\frac{k+1}{n}=\frac{2q(k+1)+2r}{(q+1)(k+1)}$$

$$\cdot\frac{k+1}{n}\geqslant\left(\frac{2q}{q+1}+\frac{2r}{(q+1)(k+1)}\right)\cdot\frac{k+1}{n}>\frac{k+1}{n}. \qquad (2)$$

比较(1)，(2)两式，即可得出矛盾．

综上所述，知命题对一切分子为 $k+1$ 的正的真分数都成立．从而对一切正的真分数命题都成立．

在这个例题中，由于 r 是用 $k+1$ 去除 n 所得的余数，所以仅知 $r<k+1$，又因 $(k+1, n)=1$，故又知 $r>0$，这样一来，便可知道 $0<k+1-r\leqslant k$．由于我们假设了“命题已对 $m\leqslant k$ 成立”，所以就可以对 $\frac{k+1-r}{n(q+1)}$ 使用归纳假设了．但如果仍旧照搬基本形式，假设“命题已对 $n=k$ 成立”，那就必然会在这里陷入被动．由此看来，在这个问题中，选择合适的假设方式是多么的重要．

例 2　考察所有具有如下性质的有序数组：(1) 这些数组都由互不相同的自然数构成；(2) 这些数组的最末一项都是 n，而且其中的每一项都不小于它前面一项的平方；(3) 各个数组所包含的项数可多少不一，但至少要有一项．证明，具备上述性质的数组的数目不超过 n 个．

为了帮助理解题意，我们先来多观察一些具体情况．这是处理较复杂的问题的一条重要经验，今后我们还将多次采用这一做法．

$n=1$ 时，仅有 1 个数组：(1)；记作 $S_1=1$．

$n=2$ 时，有 2 个：(2)，(1，2)；故有 $S_2=2$．

$n=3$ 时也有 2 个：(3)，(1，3)；故有 $S_3\leqslant 3$．

$n=4$ 时，有4个：(4)，(1，4)，(2，4)，(1，2，4)；故有 $S_4=4$．

$n=16$ 时，有 $S_{16}=8<16$，这些数组是：

(16)，　(1，16)，　(2，16)，　(4，16)，

(1，2，16)，　(1，4，16)，

(2，4，16)，

(1，2，4，16)．

通过上述观察，不仅可以断言 $n=1$ 时命题成立；而且可以为在“假设当 $n\leqslant k$ 时命题成立”后，找出证明“当$n=k+1$时命题也成立”的途径．

为了说明清楚这一点，仍以 $n=16$ 的情形为例．观察这 8 个数组，可以发现，除了一个仅含 16 的数组 (16) 外，其余七个数组都至少含有两项，如果我们略去这七个数组的最末一项，它们便分别成为以 1，2 和 4 结尾的数组，而且囊括了这些数组的全部，因此有 $S_{16}=1+S_1+S_2+S_4=8<1+S_1+S_2+S_3+S_4<16$．

我们按照同样的原则来观察 $n=k+1$ 时的所有数组，便知除了一个仅含$k+1$的数组外，其余数组都至少含有两项，而且如果略去它们的最末一项，它们便分别成为以某个不超过$[\sqrt{k+1}]$的自然数 l 结尾的数组．又因为$l\leqslant[\sqrt{k+1}]\leqslant k$，所以由归纳假设即知$S_{k+1}\leqslant 1+S_1+S_2+\cdots+S_{[\sqrt{k+1}]}\leqslant 1+1+2+\cdots+[\sqrt{k+1}]$

$$=2+2+\cdots+[\sqrt{k+1}]\leqslant[\sqrt{k+1}][\sqrt{k+1}]\leqslant k+1.$$

这就证得了命题对 $n=k+1$ 也成立．故知命题对一切自然数 n 都

是成立的.

在这里，同第27讲例 4 类似，我们在将$n=k+1$转化为$n\leqslant k$的过程中，也采用了形象化的思维. 正是这种"略过最末一项"的形象化想法，使我们得到了可以运用归纳假设的机会.

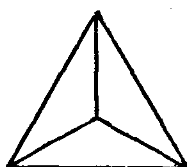
归纳假设除了可作这种形式的变通之外，还有一些其他形式的变通，由于篇幅所限，这里就不再介绍了.

二、采取大跨度的跳跃

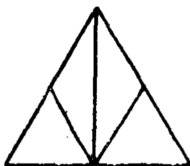
在数学归纳法的一般形式之下，通常是由"$n=k$(或$n\leqslant k$)时命题已成立"去推"$n=k+1$时命题也成立"，这就是说，每次仅往前推进一步，或叫做"以跨度 1 前进". 有些时候，我们会碰到一些命题，对它们适宜于采用大跨度跳跃，那么我们就应当在跨度上实行变通.下面先来看一个例子.

例3 设自然数$n\geqslant 3$. 证明，可将一个正三角形划分为n个等腰三角形.

通过观察，我们发现对$n=3$和$n=4$的情形可按图 28-1 所示的方式划分出来. 而在这两种划分中，都出现顶角为120°，底角为 30°的等腰三角形，对于这种等腰三角形又可按图 28-2 所示的方式分为 3 个等腰三角形，其中有 1 个正三角形和两个顶角



$n=3$



$n=4$

图 28-1



图 28-2

为 120°，底角为 30°的等腰三角形 这种情况启发我们可以采用如下的证明方法：

首先，当$n=3$和$n=4$时，可按图 28-1 所示的方式进行划分，知命题成立. 假设当$n=2k-1$和$n=2k$时，也可以划分成

功，并且在所分出的等腰三角形中都有一个顶角为120°，底角为30°的等腰三角形．于是只要再按图 28-2 所示的方式将其中这个等腰三角形划分为 3 个等腰三角形，即知当 $n=2(k+1)-1=2k+1$ 和 $n=2(k+1)=2k+2$ 时命题也成立，并且在所分出的等腰三角形中仍然包含有顶角为 120°，两底角各为 30°的三角形．所以，对一切自然数 $n\geqslant3$，所述的划分都可以成功．

在这里，我们便是根据图 28-2 所示的三角形容易一剖为3，从而使所分成的等腰三角形数目增加两个，而且仍然保持有这种形状的三角形出现的这一特点，果断地选择了以跨度 2 迈进的方式．不过为了能使所有的自然数 $n\geqslant3$ 都得到证明，我们采用了两个起点：$n=3$ 和 $n=4$．以便在由 $n=3$ 出发，以跨度 2 前进时，可以跨遍所有的奇数；而由 $n=4$ 出发，则可跨遍偶数．因此，跨度的加大与起点的增多是紧密关联的，切切不可忽略．

对于这个问题，也可采用以跨度 3 迈进的方式：

首先对 $n=4$，5，6的情形，按照图 28-3 所示的方式划分出来．注意到在所分出的等腰三角形中都至少有一个正三角形，因

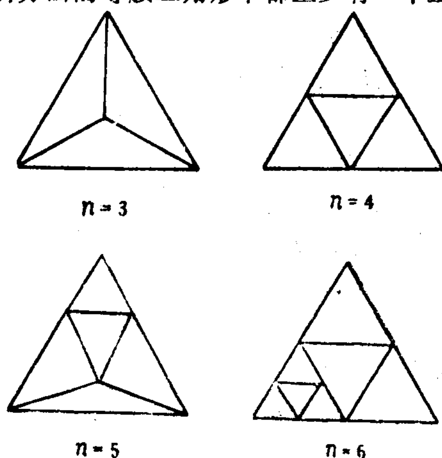


图 28-3

此只要再将此正三角形按照$n=4$的方式一剖为4个正三角形，即可使得所分出的等腰三角形数目增加3个，且保持有正三角形．所以我们可以分别从这3个起点出发，3步一跨地分别跨遍所有形如$3k+1$，$3k+2$和$3k+3$的正整数．而对于$n=3$的情形，则只要按图28-2所示的方式剖分出来即可　所以我们已经解决了用这种方法证明这个命题中所遇到的所有难点，因而可以严格地写出解答了．我们把这个书写任务留给读者作为练习．

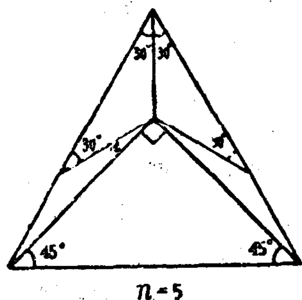


图 28-4

有趣的是，对这个问题也可以采用以跨度1前进的方式：

对$n=3$和4的情形按图28-1中的方式剖分．然后以图28-4给出$n=5$时的剖分方案．注意到在所分出的5个等腰三角形中有一个是等腰直角三角形，于是只要作其斜边上的中垂线，便可将其分为两个等腰直角三角形．这样一来，便可在$n=5$的剖分方案基础上，实现以跨度1的方式向前进了．建议读者也严密地写出这种解答．

通过例3，我们已经看到了在运用数学归纳法证题时，在跨度的选取上具有极大的灵活性．这就为在使用这种方法时提供了极大的方便．需要提请读者注意的是，在对跨度进行变通时，一定要对起点的设置作相应的变动，千万不可在逻辑上造成漏洞．

在1988年全国高中联赛第二试的试题中，就有一道需要以跨度3跨进的题目．由于在其中还涉及到命题的转化等技巧，所以我们放在第29讲中介绍．

三、采用灵活的归纳途径

这是一个内蕴丰富的标题，很难用几句话把它解释清楚，我们还是来用例子说话吧！

例4 设$a_1<a_2<\cdots<a_n$，而b_1，b_2，…，b_n是a_1，a_2，…，a_n的一个排列．如果有$a_1+b_1<a_2+b_2<\cdots\cdots<a_n+b_n$，试证：

$$b_1=a_1,\ b_2=a_2,\ \cdots,\ b_n=a_n.$$

对这个问题，要想直接证明每个b_i都等于相应的a_i，是难以实现的．于是我们先来证明一个初步结论，即证明至少存在一个i_0，使得$b_{i_0}=a_{i_0}$．这叫做先做一次"垫步"，我们采用反证法与归纳法相结合的方法来做这次"垫步"．

假设对每个i，都有$b_i\neq a_i$．

于是就有$b_1\neq a_1$．但因a_1是集合$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$中的最小的元素，而$b_1$也是该集合中的元素，所以知有$b_1>a_1$．

假设对每个$i\leqslant j$，都有$b_i>a_i$，我们来证明也一定有$b_{j+1}>a_{j+1}$．因为如果不然，有$b_{j+1}\leqslant a_{j+1}$，则因我们已设对每个i，都有$b_i\neq a_i$，故知就有$b_{j+1}<a_{j+1}$，因而也就有$b_{j+1}\leqslant a_j$(因a_1，a_2，…，a_n是按递增顺序排列的)．根据同样的理由，由$b_j>a_j$可知$b_j\geqslant a_{j+1}$．于是，我们就有$a_{j+1}+b_{j+1}\leqslant b_1+a_j$，而这显然是与已知条件相矛盾的．可见也应有$b_{j+1}>a_{j+1}$．

这样一来，我们便在"对每个i，都有$b_i\neq a_i$"的假设前提下，利用数学归纳法证得："对每个i，都有$b_i>a_i$"．但这个结论显然是错误的，这是因为既然有$\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，而$a_n$又是集合中的最大元素，因此决不可能有$b_n>a_n$，可见我们的假设前提是错误的．故知确有某个$i_0$，使得$b_{i_0}=a_{i_0}$．

有了上述的"垫步"，我们就可以正式来证明我们的命题了．

当$n=1$时，显然有$b_1=a_1$，知命题成立．假设当$n=k$时命题已经成立，要证当$n=k+1$时命题也成立．

我们先将"垫步"中的结论应用于a_1，a_2，…，a_{k+1}以及它们的一个排列b_1，b_2，…，b_{k+1}，便知存在一个i_0，使$b_{i_0}=a_{i_0}$．于是只要再对去掉a_{i_0}以后所剩下来的k个数字应用归纳假设，便知命题的结论在$n=k+1$时也成立了．

综上，即知对一切$n\in N$，命题的结论都能成立.

在这个例题中，我们实际上是运用了两次归纳法，足见其在归纳步骤上的灵活之处.

习 题 28

1. 证明，每一个自然数都或者是斐波那契数列(参阅习题27的第2题)中的一项，或是其中的若干项之和.
2. 证明，对任何$n\in N$，$x^{2n-1}-x^{1-2n}$都可以用$x-x^{-1}$的实系数多项式来表示.
3. 设p为不小于3的正整数，并记方程$x^2-(p+1)x+1=0$的两个根为x_1和x_2，证明,对任何$n\in N$，$x_1^n+x_2^n$都是不能被p整除的正整数.
4. 证明，对一切$n\in N$，方程$x^2+y^2=z^n$都存在正整数解.
5. 设f是一个严格递增的函数，它对一切正整数都有定义，且函数值也都是正整数,又知$f(2)=2$，而且当正整数m及k互质时,有$f(mk)=f(m)f(k)$，证明，对一切$n\in N$有$f(n)=n$.
6. 如果整数n可以表示成如下形式：

$$n=a_1+a_2+\cdots+a_r,$$

其中$a_1, a_2,\cdots, a_r$为正整数(不一定相异)，满足等式$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_r}=1$，就称$n$是“好”的. 今知整数33至73全是“好”的，证明，每一个不小于33的整数都是“好”的.

7. 设$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$为$n$次实系数多项式. 证明，当$a\geqslant 3$时，在下列$n+2$个数中至少有一个不小于1：

$$|a^0-P(0)|, |a^1-P(1)|, |a^2-P(2)|, \cdots, |a^{n+1}-P(n+1)|.$$

8. 设m和n为整数，且$0\leqslant m\leqslant n$，证明

$$2^{n-m}C_m^m+2^{n-m-1}C_{m+1}^m+\cdots+C_n^m$$
$$=C_{n+1}^{m+1}+C_{n+1}^{m+2}+\cdots+C_{n+1}^{n+1},$$

其中C_k^l为组合数符号.

第 29 讲　数学归纳法应用中的命题转化

苏　淳

命题转化是数学上证明命题时的一种常用手法，即在所要证明的命题 A 不易直接证得时，改为证明另一命题 B，再利用命题间的逻辑关系推出命题 A 来．这种手法在运用数学归纳法证题时也是经常采用的．下面就来看一些例子．

例 1　若 n 个正角 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\pi$，试证 $\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n\leqslant n\sin\frac{\pi}{n}$．

在这里，当 $n=1$ 时上式两端相等，知命题是成立的．然而在假设当 $n=k$ 时命题成立后，再去推证当 $n=k+1$ 时命题也成立时，却遇到了麻烦．这是因为 $n=k$ 时的不等式

$$\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_k\leqslant k\sin\frac{\pi}{k}$$

是在 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k=\pi$ 的假设条件下成立的，而现在却要在 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k+\alpha_{k+1}=\pi$ 的条件下去推证相应的不等式，这里 α_1，α_2，…，α_k，α_{k+1} 又都是正角，可见 $n=k$ 时的归纳假设已无益于我们的推导了，这当然也就断绝了我们直接使用归纳法证题的可能性．但是如果不去直接证明原来的命题，而是改为证明：

"若 n 个正角 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\leqslant\pi$，则有

$$\frac{1}{n}(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_n)\leqslant\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}\text{"},$$

那么就不仅可以从这个命题中推出我们原来的命题，而且也为使用数学归纳法开辟了道路．好吧，现在就让我们来试一试吧！

当 $n=1$ 时，这个命题显然是成立的．为了方便后面的归纳

过渡，我们再来看看 $n=2$ 的情形．设正角 $\alpha_1+\alpha_2\leqslant\pi$，于是就有 $\sin\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\geqslant 0$，因而知

$$\begin{aligned}&(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)-2\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\\&=2\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}-2\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\\&=2\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\left(\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}-1\right)\leqslant 0,\end{aligned}$$

亦即 $\frac{1}{2}(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)\leqslant\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}$，知 $n=2$ 时命题也是成立的．

假设 $n\leqslant k$ 时命题成立，即当正角 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n\leqslant\pi$ 且当 $n\leqslant k$ 时，有

$$\frac{1}{n}(\sin\alpha_1+\cdots+\sin\alpha_n)\leqslant\sin\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n},$$

要证当 $n=k+1$ 时命题也成立．

我们来分两种情况考虑：

(1) $k+1=2m$ 为偶数，则当 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m+\alpha_{m+1}+\cdots+\alpha_{2m}\leqslant\pi$ 时，有 $\alpha_1+\cdots+\alpha_{2m}\leqslant\pi$ 及 $\alpha_{m+1}+\cdots+\alpha_{2m}\leqslant\pi$，于是由归纳假设即知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k+1}(\sin\alpha_1+\cdots+\sin\alpha_{k+1})\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m}(\sin\alpha_1+\cdots+\sin\alpha_m)+\frac{1}{m}(\sin\alpha_{m+1}+\cdots+\sin\alpha_{2m})\right]\\&\leqslant\frac{1}{2}\left[\sin\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_m}{m}+\sin\frac{\alpha_{m+1}+\cdots+\alpha_{2m}}{m}\right].\end{aligned}$$

再由 $n=2$ 时的结果即知

$$\text{上式}\leqslant\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_m}{m}+\frac{\alpha_{m+1}+\cdots+\alpha_{2m}}{m}\right)$$

$$= \sin\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_m+\alpha_{m+1}+\cdots+\alpha_{2m}}{2m}$$

$$= \sin\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k+1}}{k+1} = \text{右式},$$

知当 $k+1$ 为偶数时命题成立．

(2) $k+1=2m+1$ 为奇数．则当 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m+\alpha_{m+1}+\cdots+\alpha_{2m+1}\leqslant\pi$ 时，或有 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m\leqslant\frac{\pi}{2}$，或有$\alpha_{m+1}+\cdots+\alpha_{2m+1}\leqslant\frac{\pi}{2}$，不妨设$\alpha_{m+1}+\cdots+\alpha_{2m+1}\leqslant\frac{\pi}{2}$，于是就有 $\alpha_1+\cdots+\alpha_m+\alpha_{m+1}\leqslant\pi$，以及

$$\alpha_{m+2}+\cdots+\alpha_{2m+1}+\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_{2m+1}}{2m+1}\leqslant\pi.$$

从而知有

$$\frac{1}{k+2}\left(\sin\alpha_1+\cdots+\sin\alpha_{k+1}+\sin\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k+1}}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+1}(\sin\alpha_1+\cdots+\sin\alpha_{m+1})\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m+1}\left(\sin\alpha_{m+2}+\cdots+\sin\alpha_{2m+1}+\sin\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_{2m+1}}{2m+1}\right)\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\sin\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_{m+1}}{m+1}\right.$$

$$\left.+\sin\frac{\alpha_{m+2}+\cdots+\alpha_{2m+1}+\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_{2m+1}}{2m+1}}{m+1}\right]\leqslant\sin\left[\frac{1}{2}\cdot\right.$$

$$\left.\frac{(\alpha_1+\cdots+\alpha_{m+1})+\left(\alpha_{m+2}+\cdots+\alpha_{2m+1}+\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_{2m+1}}{2m+1}\right)}{m+1}\right]$$

$$=\sin\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_{2m+1}}{2m+1}=\sin\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k+1}}{k+1},$$

再消去上式两端的同类项，即得

$$\frac{1}{k+1}(\sin\alpha_1+\cdots+\sin\alpha_{k+1})\leqslant\sin\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_{k+1}}{k+1},$$

知当 $k+1$ 为奇数时命题也成立.

所以对一切自然数 n，当正角 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n\leqslant\pi$ 时，都有

$$\sin\alpha_1+\cdots+\sin\alpha_n\leqslant n\sin\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{n}.$$

特别地，当 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\pi$ 时，便有

$$\sin\alpha_1+\cdots+\sin\alpha_n\leqslant n\sin\frac{\pi}{n},$$

而这正是我们所希望证明的结论.

在这里，通过证明一个比原命题更强的命题，使得使用数学归纳法的道路变得畅通起来，从而达到所期望证明的结论. 这种手法叫做"主动加强命题"，在利用数学归纳法证题时是经常采用的.

例 2 设 $A_n=3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}\}$共$n$重 3，$B_n=8^{8^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{8}}}}}\}$共$n$重 8. 证明，对一切 $n\in N$，有 $A_{n+1}>B_n$.

这是 1988 年安徽省合肥市高中数学竞赛中的一道试题. 许多考生试图采用数学归纳法直接证明结论 $A_{n+1}>B_n$，结果都未能成功. 其实解答这道试题的最好办法便是"主动加强命题"：

当 $n=1$ 时，我们有

$$A_{1+1}=A_2=3^3=27>24=3\cdot 8=3B_1.$$

假设 $A_{k+1}>3B_k$，于是就有

$$A_{k+2}=3^{A_{k+1}}>3^{3B_k}=27^{B_k}>24^{B_k}=3^{B_k}\cdot 8^{B_k}>3B_{k+1}.$$

故由归纳法原理知，对一切$n\in N$，都有

$$A_{n+1}>3B_k>B_n.$$

在这里，我们便是通过证明$A_{n+1}>3B_n$来达到了证明$A_{n+1}>B_n$的目的. 这种现象乍一想来，很有些难以理解：一个较弱的命题怎会比一个较强的命题更难于证明呢？但若细细地琢磨一番，

便会悟出其间的道理了：在证明一个较强的命题时，第一步的验证固然略增麻烦，但因是对具体值作验证，难度的增加并不可怕．然而却由此而有权获得一个较强的归纳假设，因而使我们在实施归纳过渡时处在了一个更加有利的位置．这大概正是一个较强的命题相对来说反而更易于证明的根本原因吧．不过在这里，还需要强调一点，在加强了归纳假设之后，应当对$n=k+1$的情况也推出加强后的结论，而不是简单地推出原来的较弱的结论就可完事的．

在批阅合肥市的竞赛试卷时，我们就发现有的考生这样来证明命题：

当$n=1$时，有$A_2=A_{1+1}=3^3>2\cdot 8=2B_1$.
假设当$n=k$时，有$A_{k+1}>2B_k$，则当$n=k+1$时，就有

$$A_{k+2}=3^{A_{k+1}}>3^{2B_k}=9^{B_k}>8^{B_k}=B_{k+1},$$

可见当$n=k+1$时，所证的不等式成立．所以对一切$n\in N$，都有$A_{n+1}>B_n$．

应当指出，这种“证明”是似是而非的，因而是错误的．其原因在于：固然我们通过观察得知$A_2>2B_1$，因此可以假设有$A_{k+1}>2B_k$．但是这毕竟只是一种假设，如果我们不能在这个假设下，也推出$A_{k+2}>2B_{k+1}$，那么也就说明了“$A_{n+1}>2B_n$”这种性质不具有继承性．换句话说，我们并不一定能由$A_2>2B_1$推知$A_3>2B_2$，于是我们在实际观察了$n=1$的情形之后，又怎么能够假设在$n=k$的情形下也会有$A_{k+1}>2B_k$呢？相反，如果我们能由$A_{k+1}>2B_k$的假设推出$A_{k+2}>2B_{k+1}$，那么就证明了“$A_{n+1}>2B_n$”这种性质具有继承性，因而使一切推导以及“对一切$n\in N$，都有$A_{n+1}>2B_n$”这一结论变得合情合理，而能够予以接受了．这一点是在运用加强命题的手法证题时应当特别加以注意的．

在1988年全国高中数学联赛中，也有一道需要用“加强命题”的手法来处理的试题：

例3 已知 $a_1=1$，$a_2=2$，

$$a_{n+2}=\begin{cases}5a_{n+1}-3a_n, & 若 a_n\cdot a_{n+1} 为偶数；\\ a_{n+1}-a_n, & 若 a_n\cdot a_{n+1} 为奇数.\end{cases}$$

试证：对一切 $n\in N$，$a_n\neq 0$.

在这里如果直接证明“对一切$n\in N$，$a_n\neq 0$”，则固然当 $n=1$，2时，命题是成立的；且可假设$a_k\neq 0$，$a_{k+1}\neq 0$，但却无法由此通过递推式而断言 $a_{k+2}\neq 0$. 可见需在命题转化上下些功夫.

我们来多观察一些数列中的具体项：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=7$，$a_4=29$，$a_5=22$，$a_6=23$，$a_7=49$，$a_8=26$，$a_9=-17$，…，可以看出这些项中有奇数也有偶数，但都不是 4 的倍数. 如果再进一步观察一下它们被 4 除后的余数，则可发现一个明显的规律：1，2，3，1，2，3，1，2，3，…. 这启发我们思索：“是否对一切$n\in N$，都有

$a_{3n-2}\equiv 1\pmod 4$；$a_{3n-1}\equiv 2\pmod 4$；$a_{3n}\equiv 3\pmod 4$？”

既然有这样的猜测，我们何不来试着证明一下？

显然，$a_1=1\equiv 1\pmod 4$，$a_2=2\equiv 2\pmod 4$，$a_3=7\equiv 3\pmod 4$，知我们的猜测在 $n=1$ 时正确.

假设当 $n=k$ 时，我们的猜测也正确，即有

$a_{3k-2}\equiv 1\pmod 4$，$a_{3k-1}\equiv 2\pmod 4$，$a_{3k}\equiv 3\pmod 4$.

于是由数列赖以定义的递推公式即知

$$a_{3k+1}=5a_{3k}-3a_{3k-1}\equiv 15-6=9\equiv 1\pmod 4；$$

$$a_{3k+2}=a_{3k+1}-a_{3k}\equiv 1-3=-2\equiv 2\pmod 4；$$

$$a_{3k+3}=5a_{3k+2}-3a_{3k+1}\equiv 10-3=7\equiv 3\pmod 4.$$

这就说明了，当 $n=k+1$ 时，我们的猜测也正确. 故知对一切 $n\in N$，我们的猜测都正确.

这样，我们就证明了：“对一切 $n\in N$，a_n 都不是4的倍数”. 由于 0是 4 的倍数，所以我们的结论也蕴涵了：“对一切 $n\in N$，$a_n\neq 0$”.

在例 3 的处理中，我们除了转化命题，还运用了“加大跨度、增多起点”的技巧，以跨度 3 向前跃进．而在“如何转化命题”的问题上，则是通过观察数列的前若干具体项，从中发现规律并提出猜测，再进而证明的．这种注重对具体而简单的情形进行观察，从中发掘规律以启迪思维的做法，是学习和研究数学的一大法宝，值得大家注意．

下面来介绍一道1963年苏联莫斯科数学奥林匹克中的试题，这是一道很富启迪性的试题

例4 已知$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=\dfrac{a^2_{n+1}+2}{a_n}$，试证：对一切$n\in N$，$a_n$皆为整数．

在这里，我们面临着与例 3 相类似的局面：固然 a_1 和 a_2 都是整数，因此可以提出“a_k和a_{k+1}也都是整数”的假设，但是却无从通过递推式断言a_{n+2}还是整数．这就迫使我们不能不在命题转化上下功夫了．

同例 3 一样，我们来观察数列的前若干项：$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=3$，$a_4=11$，$a_5=41$，$a_6=153$，…．但是这一次我们的运气却不如以前那么好：虽然数列中各项都是整数，但却看不出明显的规律．面对这种局面该怎么办？

细细分析目标，我们发现，如果数列所赖以定义的递增关系式不仅可以写成原来的形式，而且也可以写成$a_{n+2}=\alpha a_{n+1}+\beta a_n$的形式，并且其中的数又都是整数的话，那么命题不就成为显然的了吗？不过在目前，这种想法还只能算是一种奢望，它还没有得到证实．但是有奢望毕竟比没有奢望好，因为奢望，的确往往可以导致有益的发现．

带着这种奢望，我们来试着用一用待定系数法吧！用a_1，a_2，a_3之值代入其中，我们得到

$$\alpha+\beta=3,$$

用a_2，a_3，a_4之值代入其中，我们得到

$$3\alpha+\beta=11.$$

联立上述二式，解得$\alpha=4$，$\beta=-1$.那么是否是“对一切$n\in N$，都有$a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$”呢？下面就让我们来用数学归纳法证明一下吧！

当$n=1$时，显然已有$a_3=4a_2-a_1$.

假设当$n=k$时，也有$a_{k+2}=4a_{k+1}-a_k$，于是就有

$$a_{k+2}+a_k=4a_{k+1}. \tag{1}$$

要证当$n=k+1$时，也有$a_{k+3}=4a_{k+2}-a_{k+1}$. 我们有

$$a_{k+2}=\frac{a^2_{k+1}+2}{a_k}, \tag{2}$$

$$a_{k+3}=\frac{a^2_{k+2}+2}{a_{k+1}}. \tag{3}$$

由(2)式得

$$2=a_{k+2}\cdot a_k-a^2_{k+1}, \tag{4}$$

将(4)和(1)式代入(3)式，即得

$$a_{k+3}=\frac{a^2_{k+2}+a_{k+2}a_k-a^2_{k+1}}{a_{k+1}}=\frac{a_{k+2}(a_{k+2}+a_k)-a^2_{k+1}}{a_{k+1}}$$

$$=\frac{4a_{k+1}a_{k+2}-a^2_{k+1}}{a_{k+1}}=4a_{k+2}-a_{k+1}.$$

这就是说当$n=k+1$时，我们的猜测也成立. 所以对一切$n\in N$，都有$a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$.

利用上述的递推式，再用一次数学归纳法，就不难证得：“对一切$n\in N$，a_n都是整数”了.

通过上述例题，我们已经看到了“命题转化”在运用数学归纳法证题中所起的重要作用；也看到了观察、猜测乃至“奢望”对实现命题转化所具有的重要意义. 希望它们能对提高大家使用数学归纳法的能力起到积极的作用. 限于篇幅，对归纳法的其他技巧就不再介绍了.

习　题　29

1. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 为一个给定的正数序列，我们再按下述方式构造出一个多项式序列：$f_0(x)=1, f_1(x)=x, f_{n+1}(x)=(1+a_n)xf_n(x)-a_nf_{n-1}(x), n\geqslant 1$，证明，对一切$n\in N$，$f_n(x)$的根全都界于$-1$和$+1$之间．

2. 证明，存在着无穷多个具有如下性质的自然数：(1) 它们的各位数字都不为零；(2) 它们都可以被自己的各位数字之和整除．

3. 设 $a_1=1$，a_2，a_3，…是一个由自然数构成的无穷数列，当 $m>1$时，有

$$a_m\leqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_{m-1}.$$

证明，每个$n\in N$，都或为该数列中的项，或为该数列中某些项之和．

4. 证明，对任何 $n\in N$，都存在 $m\in N$，使得

$$(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}.$$

5. 设函数f的定义域和值域都是自然数集N，且有$f(n+1)>f(f(n))$．证明，对一切 $n\in N$，都有 $f(n)=n$．

6. 设a，b，c 是方程 $x^3-x^2-x-1=0$的3个根．证明：(1) a，b，c 互不相同；(2) $\dfrac{a^{1989}-b^{1989}}{a-b}+\dfrac{b^{1989}-c^{1989}}{b-c}+\dfrac{c^{1989}-a^{1989}}{c-a}$ 是整数．

7. 圆周上分布着 1988 个点，每个点上都标着$+1$ 或标着-1．如果自某点开始，依任何方向绕圆周前进到任何一点时，所经过的数字的和都是正数，则称该点是一个好点．证明，如果标作-1 的点的数目少于663个，则圆周上至少有一个好点．

8. 设有一个两端无限的数列

$$\cdots, a_{-n}, \cdots, a_{-1}, a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$$

其中的每一项都等于它的两边邻项之和的$\frac{1}{4}$．证明，如果数列中有某两项(不一定是邻项)相等，则一定会有无穷多对两两相等的项．

9. 若数列a_0，a_1，a_2，…满足条件：$a_0=\frac{1}{2}$，而$a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2(k=0, 1, 2, \cdots)$，其中 n 是某个固定的自然数．证明，$1-\frac{1}{n}<a_n<1$．

第30讲 加法原理与乘法原理的应用

苏 淳

中学阶段所学的排列组合内容虽说较为基本，但因计数问题有其自身的特点，掌握起来未必都很容易；加上竞赛题又对应试者提出了技巧方面的一定要求，因此试题中的排列组合问题往往构成竞赛的难点．

乘法原理和加法原理是两个最基本的计数原理，不仅许多排列组合公式可以通过运用它们推导出来，而且许多与计数有关的问题可以直接运用它们来解答．因此，熟练掌握这两个原理，并学会灵活地运用它们来解题，是学习排列组合、乃至学习计数方法的最基本也是最重要的一环．

乘法原理和加法原理的内容是大家所熟悉的，中学数学课本上也已经作了介绍，这里不再重复．下面着重通过一些例题来谈谈如何直接运用它们解题．

例1 证明，一个自然数n为完全平方数的充分必要条件是它共有奇数个不同的正约数．

证 对每一个自然数n作质因数分解，可写成

$$n=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_m^{r_m} \tag{1}$$

的形式，其中$1<p_1<p_2<\cdots<p_m$为质数，$m\geqslant1$，而$r_1,r_2,\cdots,r_m$为自然数．而n的每一个正约数k都具有$k=p_1^{t_1}p_2^{t_2}\cdots p_m^{t_m}$的形式，其中$t_1,t_2,\cdots,t_m$为整数，且

$$0\leqslant t_1\leqslant r_1,\ 0\leqslant t_2\leqslant r_2,\ \cdots,\ 0\leqslant t_m\leqslant r_m.$$

因此，由乘法原理知，n一共有$l=(r_1+1)(r_2+1)\cdots(r_m+1)$ (2)
个不同的正约数．

如果n是完全平方数，则$r_1,r_2,\cdots,r_m$都是偶数，于是l是

若干个奇数的连乘积，故为奇数．

反之，如果l为奇数，则表明r_1+1，$r_2+1,\cdots,r_m+1$都是奇数，亦即$r_1,r_2,\cdots,r_m$都是偶数，由(1)式即知n是完全平方数．

例1并不是一个计数问题，但却与计数问题有关．通过乘法原理，我们在自然数n的正约数的个数l同它的质因数分解式(1)中的指数r_1，$r_2,\cdots$，r_m之间建立了关系式(2)，达到了弄清问题的目的．

排列组合中经常出现的一类问题是所谓"计数问题"．解决这类问题的直接而有效手段之一便是使用两个基本的计数原理．

例2 有多少个能被3整除而又含有数字6的五位数？其中十位数是6的有多少个？

分析 正面解决这一问题较为麻烦，因为五位数中可以含有一个6，两个6，…，乃至五个6，而这些6又可出现在各个不同的数位上．因此需区分种种情况来进行讨论．权衡下来，不如先考虑其反面，即先求出"能被3整除而又不含数字6"的五位数的个数，再由"能被3整除的五位数"总数中减去这个数，得出所求．这种考虑问题的方法也是人们在计数时经常采用的．

解 易知，在由10000至99999这90000个五位数中，共有30000个可被3整除．下面来求其中不含数字6的有多少个．

我们来逐位讨论数字的可能情况：在最高位上，不能为0和6，因此有8种可能情况．在千、百、十位上，不能为6，各有9种可能情况．在个位上，不仅不能为6，还应使整个五位数能被3整除，因此所出现的数字应与前4位数字之和被3除的余数有关：当该余数为2时，个位上可为1,4,7中的一个；当该余数为1时，个位上可为2,5,8中的一个；当该余数为0时，个位上可为0,3,9中的一个．总之，不论前4位数如何，个位数上都有3种可能情况．所以由乘法原理知，这类五位数的个数为$8\times9\times9\times9\times3=17496$．因此，不含数字6而又可被3整除的五位数

共有 $30000-17496=12504$ 个.

（为了求出其中十位数是 6 的五位数的数目，我们当然也可以采用逐位考虑的办法．不过我们嫌这样考虑过于麻烦．）事实上，对任何一个可被 3 整除的五位数，只要其十位数是 6，那么一旦划去这个 6 后，它就成为一个可被 3 整除的四位数．反之，任何一个可被 3 整除的四位数 $\overline{abcd}$，只要在其个位数和十位数之间插入一个 6，变为 $\overline{abc6d}$，就是一个可被 3 整除的且十位数是 6 的五位数．所以可被 3 整除且十位数是 6 的五位数的数目就同可被 3 整除的四位数的数目一样多．而后者极易求得，即共有3000个，可见可被 3 整除且十位数是 6 的五位数也有3000个．

我们在这样一道简单的例题中，一共涉及了计数问题中常用的三种办法——考虑对立情况、利用乘法原理、建立对应关系．这些方法对解答计数问题都具有重要作用，应当努力掌握．

例3 有 $2n$ 个人参加收发电报培训，每两人结为一对互发互收，有多少种不同的结对方式？

分析 这是一个生活中的极为常见的问题．在这里显然只是关心谁同谁结为一对，而无须关心谁同谁结的对子叫做第一对，谁同谁结的对子叫做第二对，等等．因此，完全可以从一种极为朴素的角度来解答这个问题，而不必利用任何排列组合的公式．

解 让这 $2n$ 个人列成一横排，先为最左端的人排选一个结对的伙伴，有 $(2n-1)$ 种挑法；再为剩下的人中最左端的挑选一个结对的伙伴，有 $(2n-3)$ 种挑法；再为剩下的人中最左端的挑选一个结对的伙伴，有 $(2n-5)$ 种挑法；如此下去．于是由乘法原理立即知道，共有 $(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1=(2n-1)!!$

$$=\frac{(2n)!}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!} \tag{3}$$

种不同的结对方式．

上述解答的正确性是一目了然的．

我们曾经见过有人这样来解这个问题：先自$2n$个人中任选2人结为一对，有C_{2n}^2种选法；再自剩下的人中任选2个人结为一对，有C_{2n-2}^2种选法；再自剩下的人中任选2人结为一对，有C_{2n-4}^2种选法；如此下去．于是由乘法原理知有$C_{2n}^2\cdot C_{2n-2}^2\cdot C_{2n-4}^2\cdots C_2^2$

$$=\frac{(2n)!}{2!\,(2n-2)!}\cdot\frac{(2n-2)!}{2!\,(2n-4)!}\cdot\frac{(2n-4)!}{2!\cdot(2n-6)!}\cdot\cdots\cdot\frac{2!}{2!}=\frac{(2n)!}{2^n}\qquad(4)$$

种不同的结对方式．

比较上述两个结果，发现它们相差了$n!$倍，可见其中必有一错．由直觉看，结果(3)是正确的．从组合模式看，结果(4)也似乎不应当有问题．那么问题究竟出在哪儿呢？我们说：其问题就出在所分出的n个对子究竟有无编号上．

由朴素的角度出发所得到的结果(3)中，显然只顾及了“谁与谁结对”，而没有涉及“谁与谁结为第几对”，因此所得到的n个“对”是没有编号的，也就是说，作为“对子”来说，不存在谁先谁后的问题．如果要给这n个“对子”编号，那么就还有$n!$种不同的编号方式．于是在结果(3)的基础上，就可得出共有

$$\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}\cdot n!=\frac{(2n)!}{2^n}$$

种不同的有编号结对方式，这恰好就是结果(4)．可见就我们的问题而言，结果(3)是正确的，结果(4)由于考虑了“对子”的编号顺序，因而是不正确的．（因为我们并不需要为“对子”编号！）

例3告诉我们：在使用组合模式解题时，已经天然地为所分出的小组(或称“对子”)编了号．换句话说，我们在得出结果(4)的过程中，事实上是在按如下的思路行事的：先自$2n$个人中挑出两人组成第一对，有C_{2n}^2种挑法；再自剩下的人中挑出两人组成第二对，有C_{2n-2}^2种挑法；再自剩下的人中挑出两人组成第三对，有C_{2n-4}^2种挑法；如此等等．因此，在不需要为所分出的“对”子编号时，这样天然地已编上的号码便成为多余的了．所以

在这种场合下，我们不应当按组合模式处理问题；或者在按组合模式处理问题后，还应再消去编号所造成的后果．组合模式的这一特性是我们时时处处应当注意的．

以上我们着重介绍了计数原理的直接运用．这些例题表明，在一些场合下，直接运用计数原理解题反而比运用排列组合公式解题更具优越性．下面再来看一些需要运用公式来解答的问题．

例 4 要将 $n+1$ 个不同的小球放入 n 个不同的盒子，有多少种不同的放法不出现空盒？

解法一 由于不能出现空盒，所以应当有一个盒子放两个球，其余各盒则都应放入一个球．从这n个盒子中选出一个放两个球，有 C_n^1 种不同选法．从这 $n+1$ 个球中选出两个球放入此盒，有 C_{n+1}^2 种选法．其余$(n-1)$个球分别放入其余 $n-1$个盒子，有$(n-1)!$种不同放法．因此由乘法原理知共有$C_n^1C_{n+1}^2(n-1)!$ $=\frac{n}{2}(n+1)!$种不同放法不出现空盒．

上述解法是从盒子的角度来考虑问题的．我们也可以从球的角度来考虑问题．

解法二 有两个球应放入同一个盒子．从这 $n+1$ 个球中选出两个球，有 C_{n+1}^2 种不同选法．将这两个球视为一个球，再与其余$(n-1)$个球一道分别放入这n个盒子，共有$n!$种不同放法．所以一共有 $C_{n+1}^2\cdot n!=\frac{n}{2}(n+1)!$种不同放法不出现空盒．

解法三 先将这 $n+1$ 个球排成一排，共有$(n+1)!$排法．再在它们之间插入隔板，以表示将它们放入不同的盒子．由于不能出现空盒，因此必须将 $n-1$ 块隔板分别插在它们两两之间的 n 个间隔中的 $n-1$ 个之上，故有 $C_n^{n-1}=n$ 种不同插法．又因放入同一个盒子的两个球无顺序之分，因此一共有 $(n+1)!\cdot n\cdot\frac{1}{2!}=\frac{n}{2}(n+1)!$种不同放法不出现空盒．

以上三种解法各从不同的角度考虑问题，都收到了殊途回归之效．这种现象在计数问题中相当多见，我们应当学会从不同的角度来考察和解答计数问题．

例5 n个人排成一列，其中甲乙两人之间要站r个人，乙丙之间也要站r个人$(0<2r<n-3)$，有多少种不同的列队方式？

解法一 先让其余$(n-3)$人排成一列，再让甲乙丙三人插入到适当的位置上．$(n-3)$人列队的方式有$(n-3)!$种．甲乙丙三人可按甲乙丙的左右顺序，也可按丙乙甲的左右顺序插入，且在每种左右顺序之下，都是一旦甲的位置定下以后，乙丙两人的位置也就随之而定了下来．不难知道，在两种左右顺序之下，甲都有$(n-2r-2)$个位置可供选择．因此由乘法原理知，一共有$2(n-2r-2)(n-3)!$种不同的列队方式．

解法二 先让甲乙丙三人先排好左右顺序，共有2种排法．再自其余$(n-3)$人中挑出r个人站在甲乙之间，有P_{n-3}^{r}种站法．然后再挑出r个人站在乙丙之间，有P_{n-3-r}^{r}种站法．这时，再将上述已站好的$3+2r$个人算成一个整体，同其余$n-3-2r$个人一起作全排列，则又有$(n-2-2r)!$种不同的排列方式．由乘法原理知，共有$2\cdot P_{n-3-r}^{r}\cdot P_{n-3}^{r}\cdot(n-2-2r)!=2(n-2r-2)(n-3)!$种不同的列队方式．

以上各例题都较多地依赖于乘法原理．在另一些较为复杂的场合下，则往往需区分情况分头计算，或先考虑某种一般情况，然后再逐步排除掉多算入的部分．这些场合下，则往往要依赖于加法原理．

例6 在平面上给定5个点．已知连结这些点的直线互不垂直，互不重合，也不平行．通过每一点向其余4点的各条连线作垂线，这些垂线的交点最多有多少个（不包括原来的5个点）？

解 由给定的5个点两两连成$C_5^2=10$条直线，由其中每4个点则两两连出了$C_4^2=6$条直线，因此自每个点都引出了6条垂

线，共计 $5\times6=30$ 条. 如果每两条垂线都相交，一共可交得 $C_{30}^2=455$ 个交点. 但是这 30 条垂线是分别向 10 条连线引出的，每条连线的 3 条垂线互不相交，因此应减去 $10\cdot C_3^2=30$ 个交点. 又所给定的5 个点共形成 $C_5^3=10$ 个三角形，所引的 30 条垂线刚好是这 10 个三角形的全部高线. 每一个三角形的 3 条高线相交于同一个点，因此还应减去 $10C_3^2-10=20$ 个交点. 最后，由于原来 5 点中的每一个都是6条垂线的交点，所以还应减去 $5C_6^2=75$ 个交点，所以知这些垂线的交点至多有 $455-30-20-75=310$ 个.

习 题 30

1. 10 双互不相同的鞋子混装在一只口袋里，从中随意取出 4 只，试求各有多少种情况出现如下结果？(1) 4 只鞋中没有成双的；(2) 4 只鞋中有 2 只成双，另两只不成双；(3) 4 只鞋恰成两双.
2. 比赛前夕，将 7 名运动员分成三个小组进行互帮互练，有多少种不同的分组方式？
3. 将 $2n$ 名新战士结合成 n 个 2 人小组学习机枪射击. (1) 如果两人中有一人学习担任正射手，另一人为副射手；(2) 如果 2 人不分正副. 各有多少种不同的分组方式？
4. 用1,2,3,4,5 这五个数字，可以组成多少个比 20000 大，并且百位数不是 3 的没有重复数字的五位数？
5. 笼中关有许多黑猫和白猫，将笼门打开一个小小的口子，让猫一只接一只地往外跳，并依次记下所跳出的猫的颜色，直到跳出了 n 只猫为止. 试问，共可能记录到多少种不同的黑白相间的颜色列？

第31讲 计数问题的简化

苏 淳

除了中学课本中所介绍过的基本类型的排列组合问题外，我们还经常会遇到一些可用所学过的知识来解答的其他类型的计数问题. 例如1988年全国高中数学联赛第一试的试题中就有一个这样的问题

例1 甲乙两队各出7名队员按事先排好的顺序出场参加围棋擂台赛. 双方先由1号队员比赛，负者被淘汰，胜者再与负方2号队员比赛……直到有一方队员全被淘汰为止，另一方获得胜利，形成一种比赛过程. 试求所有可能出现的比赛过程的种数.

分析 解答这个问题显然既要用乘法原理，又要用加法原理. 这是因为：胜方很可能仅出场了1个队员，就连续击败了负方所有的队员；胜方可能动用了1号和2号两个队员，才相继击败了负方所有队员……胜方还可能7名队员全都相继上场，才击败了负方所有队员. 因此胜方击败负方所有可能出现的比赛过程的种数应当是上述7种情况下的过程种数之和，这是加法原理. 另外，由于胜方可能是甲队，也可能是乙队，所以所有可能出现的比赛过程的种数应当是上述过程种数之和的两倍，这又是乘法原理.

通过上述分析，我们已清楚地看到，关键的问题是求出胜方动用了k名$(1\leqslant k\leqslant 7)$队员才获胜的所有可能出现的比赛过程的种数$S_k$. 下面我们就来讨论$S_k$的求法.

解法一 既然胜方用了k名队员才淘汰了负方的全部7名队员，而双方队员的上场顺序又都是预先排定的，所以负方的7号队员一定是被胜方的k号队员所淘汰的. 而在此之前，负方已被

淘汰了6名队员，胜方则被淘汰了$k-1$名队员．由于每一回合只淘汰且必淘汰一名队员，因此在此之前已比赛了$6+k-1=k+5$个回合，且其中有$k-1$个回合中被淘汰的是胜方的队员，可见此时所有可能的不同比赛过程的种数为C_{k+5}^{k-1}，即

$$S_k=C_{k+5}^{k-1},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ 7.$$

所以，所有可能出现的不同的比赛过程的种数是

$$2(C_6^0+C_7^1+C_8^2+\cdots+C_{12}^6)=2C_{13}^7=3432.$$

以上我们通过普通的组合模式，即从“在$k+5$个回合中，有哪$k-1$个回合中淘汰的是胜方队员”入手来解答问题的．下面我们再从另一个角度来考虑S_k的求法．

解法二 设想有7个排成一行的小球（用它们代表负方已排定了顺序的7名队员），我们用$k-1$块隔板将它们隔开为k段（其中有些段可能为空的），并对这些段按自左至右的顺序编号，



对小球也按自左至右的顺序编号．只要第k段不空，并令第j段（$1\leqslant j\leqslant k$）中的球的号码代表被胜方的第j号队员所淘汰的负方队员的号码．一种分段方式即对应着一种可能的比赛过程，所以S_k就是将7个已排为一行的小球分为k段且使最右端的一段不空的分段方式数．但是，这些分段方式共有多少种呢？显然，每一种分段方式，就是一种如何将$k-1$块隔板和前6个小球依次放到$k+5$个位置上的方式．也就是在$k+5$个位置上，有哪$k-1$个位置放隔板，有哪6个位置放小球的方式．因此知有

$$S_k=C_{k+5}^{k-1}=C_{k+5}^6.$$

以上我们用来解答问题的第二种模式，在排列组合中叫做“不尽相异元素的排列问题”．它的一种形象的提法是：“要将m个白球和k个黑球排成一行，有多少种不同的排法？”这里值得注意的是：我们并未强调m个不同的白球或是k个不同的黑球，这就是说，我们只关心哪m个位置上放白球，而不关心哪一个白球放

在哪个位置上。因此这个问题的答案是 C_{m+k}^{m} 种，而不是 $(m+k)!$ 种.

不尽相异的元素的排列也是一种常见的基本计数问题类型，有很多用途，下面再来看一个例子.

例 2 城市的 A 处与 B 处之间有整齐的道路网如图 31-1 所示，试问，由 A 至 B 有多少种不同的走法？(假定不故意兜圈子，且都沿道路前进.)

解 我们将图 31-1 中最小正方形的每一边都叫做一个小段. 显然不论怎样由 A 走到 B，只要都沿道路前进且不故意兜圈子，那么都必须向东走过 4 个小段向北也走过 4 个小段. 至于是先向东还是先向北，则可有多种不同安排，因此恰好构成不尽相异元素的排列，故知有 $C_8^4=70$ 种不同的走法.

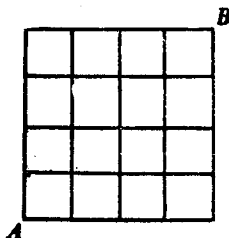


图 31—1

在刚才例 1 的第二种解法中，我们将 7 个已排好顺序的小球隔开为 k 段. 在这里，7 个小球间已不存在排序问题，我们只需将它们隔开即可. 而在所隔成的小段中，有的段中还允许没有小球(这意味着胜方相应的队员一上场即被淘汰). 这种情景我们还可以描述为："将若干个无区别的小球(因它们间不用再排序)分放到 k 个不同的盒子中，允许出现空盒"这样一种模式. 因此，还可以用"分球入盒"的语言来解释. "分球入盒"问题在计数问题中也是一种有趣的计数模式，下面来作些进一步的讨论.

例 3 欲将 n 个无区别的小球分别放入 k 个不同的盒子($k\leqslant n$)，不允许出现空盒，有多少种不同的放法？

解 仍采用前面用过的思考方法. 设想已将 n 个小球一字排开，并用 $k-1$ 块隔板将它们隔成 k 段，然后再将各段分别对应各个盒子，显然隔法的数目即为我们所要求出的分法数目. 由于此时

不能出现空盒，所以隔板只能放在 n 个小球之间的 $n-1$ 个间隔位置上，而且每个间隔位置上都至多能放一块隔板．这也就相当于从 $n-1$ 个间隔位置上选出 $k-1$ 个来放置隔板．由此可知，共有 C_{n-1}^{k-1} 种不同的隔法，因此也就有 C_{n-1}^{k-1} 种合乎要求的分球入盒方式．

利用这种"分球入盒"的模式，可以解答许多有趣的问题．

例 4 试问不定方程 $x+y+z=16$ 共有多少组不同的正整数解？

解 我们当然可以设想为：共有 16 个无区别的小球和 3 个不同的盒子，要将这 16 个小球分别放入 3 个盒子，并且每个盒中至少放一个球，然后将第一个盒子中的球数作为 x 的值，第二个盒子中的球数作为 y 的值，第三个盒子中的球数作为 z 值．于是，对应于每一种放法，就都有 (x, y, z) 的一组正整数解．反之，对应于 (x, y, z) 的每一组正整数解，也都有一种放球入盒的方式．这样，利用例 3 的结论，即可知道原不定方程共有

$$C_{15}^{2}=\frac{15\times 14}{2}=105$$

组不同的正整数解．

例 5 试问，例 4 中的不定方程共有多少组不同的非负整数解？

解法一 显然，这时允许出现空盒．于是利用前面的讨论，知道可以用"不尽相异元素的排列"的模式来解答，从而得知共有

$$C_{(16-1)+(3-1)}^{3-1}=C_{17}^{2}=\frac{17\times 16}{2}=136$$

组不同的非负整数解．

解法二 （用"不允许出现空盒"的放球入盒模式来讨论．）事实上，对于方程

$$x+y+z=16 \tag{1}$$

的每一组非负整数解(x_0, y_0, z_0)来说，数组

$$(x_0+1, y_0+1, z_0+1)$$

都是不定方程

$$x+y+z=19 \quad (2)$$

的一组正整数解．反之，对于方程(2)的每一组正整数解(x_1, y_1, z_1)来说，数组(x_1-1, y_1-1, z_1-1)则都是方程(1)的一组非负整数解．所以只要求出方程(2)的正整数解的数目即可．于是利用例3的结论即知，方程(1)共有$C_{19-1}^{3-1}=C_{18}^{2}=153$组不同的非负整数解．

这样，我们便收到了"异途同归"之效．

上述的思路也可用来解答例1．假设胜方不是战胜了负方的7名队员，而是上场的k名队员每人都至少战胜了1名负方队员，并一共战胜了负方$7+k-1=k+6$名队员．于是同样可以求得$S_k=C_{k+6-1}^{k-1}=C_{k+5}^{k-1}$．

通过上述分析，我们看到了在计数的各种模式之间存在着各种各样的联系，而且对于一个问题往往可以从不同的角度入手并采用不同的模式来解答．不过，我们在选用不同的模式时，应当注意对所选用的模式有合理的解释，不能不分青红皂白地胡乱套用．

例6 高二年级8个班协商组成年级篮球队，共需10名队员，每个班至少要出1名，有多少种不同的组成方式？

解 本题相当于求如下的不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_8=10$$

的不同的正整数解$(x_1, x_2, \cdots, x_8)$的组数．因此，由例4所述的方法，知共有

$$C_{10-1}^{8-1}=C_9^7=C_9^2=36$$

种不同的组成方式．

当然本题也可有其他的解法．例如将问题区分为："有一班出

3 人，其他班各出 1 人"，"有两个班各出 2 人，其他班各出 1人"等情况来分头计算，然后相加. 但相比之下，解答过程要繁琐得多. 可见以上所介绍的解法确实具有其优越性.

例 7 晚会上共有 6 个演唱节目和 4 个舞蹈节目，要求每两个舞蹈节目之间至少有一个演唱节目，可有多少种不同的节目顺序表？

分析 这个例题曾选为高考试题，从类型上说是排列与组合的综合，较上述例题复杂.但我们可先从组合入手，再考虑排列.

解 将 6 个演唱节目视为 6 个一字排开的小球，要在它们之中插入4 块木板，木板不能相邻，但可放在球的两头，故可有 C_7^4 种



插法. 然后再考虑演唱节目之间的排序、舞蹈节目之间的排序，从而由乘法原理知，共有

$$C_7^4 \cdot P_6^6 \cdot P_4^4 = 604800$$

种不同的节目顺序表.

现在，我们将例 7 改为

例 8 晚会上共有 9 个演唱节目和 4 个舞蹈节目，并要求每两个舞蹈节目之间至少有两个演唱节目，可有多少种不同的节目顺序表？

解 先得到如例 7 所述的一种插板方式，然后再在每两块木板之间加入一个小球，则显然就是一种在每块木板之间都至少间隔两个小球的插板方式；反之，对于在 9 个小球之间及两头共插入 4 块木板且每两板之间至少有两个小球的每一种插法，只要在每两板之间都减少一个小球，便就成为如例 7 所述的一种插法. 可见这里的插板方式也有 C_7^4 种. 再结合舞蹈节目、演唱节目的排序，便知共有

$$C_7^4 \cdot P_4^4 \cdot P_9^9 = 304819200$$

种不同的节目顺序表.

回顾上述几个例题的解答过程，我们可以看到一个共同的特点，就是利用一一对应关系，将一种不易直接求得其数目的计数模式转化为另一种易于计算的模式，从而收到了简化问题的效果．可以说，这种通过建立一一对应关系而化难为易的办法，是数学中的一种常用手法，并且在计数问题中发挥着极大的作用．我们应当认真掌握这一思想方法，努力提高使用这种方法的自觉性．

习 题 31

1．在方程 $x+y+z=16$ 所有的正整数解中：

(1) 有多少组解中的 x,y,z 中的每两个都不相同?

(2) 有多少组解满足条件 $x\leqslant y\leqslant z$?

2．在方程 $x+y+z=1$ 的整数解中，有多少组解满足条件 $x>-6$，$y>-6$，$z>-6$?

3．设有 10 个无区别的小球，要放入 6 个不同的盒子，试求有多少种放法使得至少有两个盒子不空?

4．试问，在 1 与 10^6 之间，有多少个正整数的各位数字之和等于10?

5．将正整数 $1,2,\cdots,n,n+1$ 排成一行，要求除最左端的数字外，每一个数同排在它左边的某一个数相差 1(可大1，也可小1)，可以有多少种不同的排法?

6．一个笼子里关有黑猫、白猫、黄猫各 n 只，将笼门打开一个小缺口让猫一只接一只地往外跳，并依次记录所跳出的猫的颜色，一直到 n 只黑猫全都跳出时为止，假设此时笼内尚有 $k(\leqslant n)$ 只白猫和 $m(\leqslant n)$ 只黄猫．试问，我们有可能记录到多少种不同的颜色序列?

7．接第 6 题，假设一直记录到所有的猫全都跳出为止．试求出现如下情况时所可能记录到的不同颜色序列的数目：第一只跳出的是黑猫．且当第一只黄猫跳出时，前面已有白猫跳出．

8．今有 n 个年轻人和 r 个老人，$n>2r$．要将他们排成一行，要求每个老人的左右都各有一个年轻人搀扶，且这两个年轻人只负责搀扶这一位老人，有多少种不同的排列方式?

第32讲　用配对法解计数问题

李 炯 生

计数问题是人们最常遇到的数学问题之一．例如，一个班上有六名要好的同学，要欢送他们的好朋友小王转学，摄影留念．七名同学坐成一排，小王坐在中间，其他同学坐在两边，有多少种坐法？又例如，校学生会搞到一部分全运会的入场券，分给高一的三个班，每个班分到的票数都不超过其他两个班的票数之和，有多少种分法？等等．从集合论的角度讲，所谓计数问题，就是给定一个有限集合 S，要求出集合 S 所含元素的个数．集合 S 所含元素的个数通常叫做集合 S 的基数，记作 $|S|$．譬如，在上面提到的例子中，如果 S 表示七名同学坐成一排，小王坐在中间的所有可能的坐法，问题就是求出基数 $|S|$．

有的同学可能会想，如果集合 S 给定了，那么一个元素是否属于集合 S 也就确定了，集合 S 所含元素的个数 $|S|$ 也就随之确定了．求基数 $|S|$ 有什么困难？讨论计数问题真有必要吗？实际上，这是将复杂问题误为简单问题了．在许多具体问题中，所要计数的集合 S 往往是很复杂的．它所含的元素要由一些条件确定．要弄清楚一个元素是否属于集合 S 都不容易，更不用说求出集合 S 的基数了．下面我们用一个著名的例子来说明这点．

有 $m\times n$ 个数，它们由数 0 或 1 构成．把这 $m\times n$ 个数排成一个 m 行 n 列的数表 A：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

其中 a_{ij} 表示排在第 i 行第 j 列上的数．数表 A 叫做一个 $m\times n$ 的(0,1)矩阵．(0,1)矩阵 A 的第 i 行上所有元素

的和记作r_i，即$r_i = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n}, i = 1, 2, \cdots, m$，记$R = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$，它叫做(0，1)矩阵$A$的行和向量．(0，1)矩阵$A$的第$j$列上的所有元素的和记作$s_j$，即$s_j = a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{mj}, j = 1, 2, \cdots, n$．记$S = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$，它叫做(0,1)矩阵$A$的列和向量．所有行和向量为$R$、列和向量为$S$的(0,1)矩阵$A$的集合记作$(R, S)$．问题是要求出矩阵集合$A(R, S)$的基数$|A(R, S)|$．这是一个著名的计数问题，难度极大．关键在于，对于给定的行和向量$R = (r_1, r_2, \cdots, r_m)$，列和向量$S = (s_1, s_2, \cdots, s_m)$，行和向量为$R$且列和向量为$S$的(0,1)矩阵并不一定存在．直到1963年，著名组合数学专家赖瑟(Ryser)才给出了行和向量为R且列和向量为S的(0,1)矩阵存在的充要条件，也就是说，赖瑟解决了何时$|A(R, S)| \neq 0$的问题；过了将近20年，1980年，我国学者魏万迪才给出当$|A(R, S)| \neq 0$时，$|A(R, S)|$的一个非平凡的下界．

正由于计数问题是普遍存在的，解决计数问题又不容易，迫使人们去探寻解决计数问题的理论与方法．在这两讲中，我们将介绍有关计数理论的简要内容．

最简单的计数方法恐怕就是配对法了．对于有限集合A与B，如果存在集合A到B上的双射φ，则可将集合A中的元素a与它在B中的象$\varphi(a)$配成一对$(a, \varphi(a))$．很明显，A中每个元素一定出现而且只出现在一个对子之中，B的元素也一样．这说明，集合A与B具有相同的基数，即$|A| = |B|$．于是我们有这样的结论：如果有限集合A与B之间存在双射，则$|A| = |B|$．

上述结论提供了计数的一种基本方法．假定所要计数的集合A很复杂，我们就设法去寻找一个便于计数的集合B，并且建立集合A到B上的双射φ，这样就将求$|A|$的问题转移到求$|B|$．当然，要实现这种转移，必需做到两点：1．掌握一些典型的便于计数的集合B；2．掌握建立集合间映射的典型技巧．下面通

过一些例子来介绍实现这种转移的典型技巧

例1 求n元集合S的所有子集的个数.

解 设n元集合$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$. S的所有子集的集合记作$P(S)$. 由n个数$x_1,x_2,\cdots,x_n$构成有序数组$x=(x_1, x_2, \cdots x_n)$叫做n数组. 如果n数组$x=(x_1,x_2,\cdots, x_n)$的每个分量x_i都是0或者1，则x叫做n维(0,1)向量. 所有n维(0, 1)向量的集合记作C_n. 设$A\in P(S)$，由A可以确定一个n维(0, 1)向量$\varphi(A)=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$如下：如果$a_i\in A$，则令$x_i=1$，否则$x_i=0$，$i=1, 2, \cdots, n$. 例如，如果$A$是空集，则$\varphi(A)=(\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n\text{个}0})$，如果$A=S$,则$\varphi(A)=(\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n\text{个}1})$.

建立集合$P(S)$到C_n的映射φ：设$A\in P(S)$，则A在映射φ下的象规定为$\varphi(A)$. 很明显，如果A与B是S的不同子集，则必有某个元素a_i不同时属于A与B. 于是$\varphi(A)$与$\varphi(B)$的第i个分量必不相等. 因此$\varphi(A)\neq\varphi(B)$. 这说明，映射φ是单射. 其次，设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C_n$. 定义集合$A$如下：当$x_i=1$时，令$a_i\in A$，否则令$a_i\notin A$，$i=1, 2, \cdots, n$. 则$A\in P(S)$，并且$\varphi(A)=x$. 这说明映射$\varphi$是满射. 于是$\varphi$是集合$P(S)$到$C_n$上的双射. 因此$|P(S)|=|C_n|$. 由于$n$维(0,1)向量$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的每个分量$a_i$只有两种可能的取值，而不同分量的取值又彼此无关，因此共有2^n个n维(0,1)向量，即$|P(S)|=|C_n|=2^n$.

例1中建立集合$P(S)$到C_n的映射的方法是很值得注意的. 上面的叙述比较形式，不易看清实质，这里有必要再说几句话. 集合S的n个元素$a_1,a_2,\cdots,a_n$可以看成n个编号的球. n维(0,1)向量的n个坐标可以看成n个空盒：

□ □ □ … □
1 2 3 … n

设S的子集$A_1=\{a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}\}$，将球$a_{i_1}$, $a_{i_2},\cdots,a_{i_k}$依次放进第i_1, $i_2,\cdots$, i_k号空盒，

其他的空盒不放球．于是得到一种将 n 个球放到 n 个空盒的放法．同时，在第 $i_1,i_2,\cdots i_k$ 个坐标位置上写上 1，其他坐标位置上写上 0，便得到一个 n 维(0,1)向量．所以 n 维(0,1)向量可以看成把 n 个球放到 n 个空盒的一种方法．将球放进空盒是理解处理计数问题的方法的一种工具．

例 2 将正数 m 写成 n 个正整数之和，如果和式中项的位置次序不同，则认为是不同的写法．求所有写法的种数 $P(m,n)$．例如，将 5 写成 3 个正整数之和，有 $5=3+1+1=1+3+1=1+1+3=2+2+1=2+1+2=1+2+2$，共有 6 种写法．

解 将 m 写成 n 个正整数之和的所有写法集合记作 A．设 $\alpha\in A$，在写法 α 下，m 写成 $m=a_1+a_2+\cdots+a_n$．记 $S_1=a_1$，$S_2=a_1+a_2$，…，$S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$，则 $1\leqslant S_1<S_2<\cdots<S_{n-1}<m$．序列 $S_1,S_2,\cdots,S_{n-1}$ 记作 $\varphi(\alpha)$ 显然，$\varphi(\alpha)$是从自然数 $1,2,\cdots,m-1$ 中取出 $n-1$ 个正整数 $S_1,S_2,\cdots,S_{n-1}$ 构成的递增序列．所有这种序列的集合记作 B．则 $|B|=C_{m-1}^{n-1}$，即从 $m-1$ 个不同物件取出 $n-1$ 个的组合数．现在建立集合 A 到 B 的映射 φ 如下：设 $\alpha\in A$，则 α 在 φ 下的象规定为上面所说的 $\varphi(\alpha)$．设 $\alpha,\alpha'\in A$，且 $\alpha\neq\alpha'$，在写法 α 下，m 写成 $m=a_1+a_2+\cdots+a_n$，在写法 α' 下，m 写成 $m=a_1'+a_2'+\cdots+a_n'$．因为 $\alpha\neq\alpha'$，故必有某个 i，$1\leqslant i\leqslant n-1$，使得 $a_i\neq a_i'$，而 $a_1=a_1'$，$a_2=a'_2$，$\cdots,a_{i-1}=a_{i-1}'$．于是 $S_1=S'_1,\cdots,S_{i-1}=S_{i-1}'$，但 $S_i\neq S_i'$．因此 $\varphi(\alpha)\neq\varphi(\alpha')$．这说明，$\varphi$ 是单射．设 $\beta\in B$，且序列 β 由 $n-1$ 个正整数 S_1，S_2，…，S_{n-1} 构成．由于 $1\leqslant S_1<S_2<\cdots<S_{n-1}<m$，因此，$S_1>0$，$S_2-S_1>0$，…，$S_{n-1}-S_{n-2}>0$，$m-S_{n-1}>0$，并且 $m=S_1+(S_2-S_1)+\cdots+(S_{n-1}-S_{n-2})+(m-S_{n-1})$．这样便确定 m 写成 n 个正整数之和的一种写法 α，而且 $\varphi(\alpha)=\beta$．这说明，φ 是满射，从而是双射，因此 $P(m,n)=|A|=|B|=C_{m-1}^{n-1}$．

在上例中，将 m 写成 n 个正整数之和，通常叫做 m 的一个分拆．由于和式中项的次序不同，被认为是不同的写法，即认为分拆也不同．因此这种分拆也叫做有序分拆．正整数 m 的所有有序分拆的种数记作 $r(m)$，叫做 m 的有序分拆数．由例 2 可以得到，$r(m)=P(m,1)+P(m,2)+\cdots+P(m,m)$

$$=C_{m-1}^{0}+C_{m-1}^{1}++\cdots+C_{m-1}^{m-1}=2^{m-1}.$$

有序分拆数 $r(m)$ 也可以用例 1 的方法求得．这留给读者作习题．

在直角坐标平面 xoy 上，直线 $x=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 与 $y=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 构成正方形网．正方形网上的点叫做格点，或者整点．从某个格点 $P_0=(a_0,\ b_0)$ 出发，向右画一条斜率为 1 或者 -1 的线段，其右端点为 $P_1=(a_1,b_1)$，其中 $a_1=a_0+1$，$b_1=b_0\pm1$．再从格点 P_1 出发，向右画一条斜率为 1 或者 -1 的线段，其右端点为 $P_2=(a_2,b_2)$，$a_2=a_0+2,b_2=b_1\pm1$．等等．经过 n 步，一直画到格点 $P_n=(a_n,\ b_n)$，其中 $a_n=a_0+n$，$b_n=b_{n-1}\pm1$，得到一条折线 L（图 32-1）．各方格中出现折线 L 的那一段叫做折线 L 的一节．

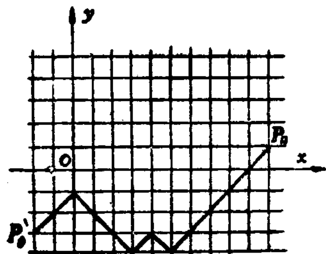


图 32-1

例 3 给定格点 $P=(a_0,b_0)$ 与 $Q=(a,b),a>a_0$，求连结 P 与 Q 的折线的条数．

解 所有连结格点 P 与 Q 的折线的集合记作 S．设 $L\in S$．记 $n=a-a_0$．则折线 L 由 P 到达 Q 必须经过 n 步，即折线 L 由 n 节组成．设其中向上的共有 x 节，向下的有 y 节，则 $x-y=b-b_0$，$x+y=n$．因此 $x=\dfrac{n+(b-b_0)}{2}$．记 $\dfrac{n+(b-b_0)}{2}=n_1$．现在取编号 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个空格．如果折线 L 自左至右算起的第 i 节是向上的，则在第 i 个空格里填上 1，否则填上 0，$i=1,\ 2,$

$\cdots,n$. 得到将 n_1 个 1 与 $n-n_1$ 个 0 填到 n 个空格的一种填法，记作 $\varphi(L)$. 所有将 n_1 个 1 与 $n-n_1$ 个 0 填进 n 个空格的填法集合记作 T. 则 $\varphi(L)\in T$. 于是可以建立由 S 到 T 的映射 φ 如下：对于 $L\in S$，则 L 在 φ 下的象即规定为上面所说的 $\varphi(L)$. 容易验证，映射 φ 是双射. 因此 $|S|=|T|$. 而将 n_1 个 1 与 $n-n_1$ 个 0 填到 n 个空格的一种填法相当于从 $1,2,\cdots,n$ 中取出 n_1 个数的一种取法，例如第 i 个空格填上 1，则将数 i 取出，等等. 因此，$|S|=|T|=C_n^{n_1}$. 这就是所求折线的条数.

应该说明的是，对任给的两个格点 $P=(a_0,b_0)$, $Q=(a,b)$，连线 P 与 Q 的折线 L 并不一定存在. 从上面的推导可以看出，如果折线 L 存在，则 $a>a_0$, $a-a_0+b-b_0$ 为偶数. 反之可以证明，如果 $a>a_0$, $a-a_0+b-b_0$ 为偶数，则折线 L 存在. 请读者自己证明.

习 题 32

1. 矩形城市的道路非常规则，恰有 m 段长与 n 段宽(图 32 2). 有位妇女住在城市的西南角，每天步行到东北角上班，每个交叉路口不得经过两次. 证明她所选取的路线数目 $f(m,n)$ 满足 $f(m,n)\leqslant 2^{mn}$. (加拿大数学竞赛题).

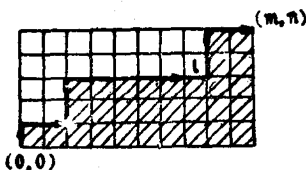


图 32-2

2. 设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，且 $A\in P(S)$.
将 A 中的元素由大到小排列，然后从最大的数开始交替地减或加后继的数得到的和叫做 A 的交替和，例如，$A=\{1,4,9,6,2\}$，重新排列为 $\{9,6,4,2,1\}$，它的交替和为 $9-6+4-2+1=9$. 求所有这种交替和之和. (美国数学竞赛试题.)

3. 甲、乙两人比赛乒乓球，甲得 m 分，乙得 n 分，$m>n$. 在 $m+n$ 场乒乓球赛中，甲得分一直领先的得分记录有多少种可能?

第33讲　容斥原理及其应用

李　炯　生

先考虑一个简单的计数问题.

例 1　求自然数1, 2, …, 600 中不能被 6 整除的自然数个数.

解　自然数 1, 2, …, 600 中能被 6 整除的正整数是 6, 12, 18, …, 600. 即从正整数 1 开始，每隔 6 个位置的整数都能被 6 整除. 所以从1至600 之间能被6整除的正整数个数是 600/6 = 100. 因此在 1 到 600 之间不能被 6 整除的自然数个数是 600 - 100 = 500.

在例 1 中，记自然数 1, 2, …, 600 构成的集合为 S. S 中能被 6 整除的正整数集合记作 A. S 中所有不在 A 中的正整数集合叫做 A 对 S 的补集，记作 $\overline{A}$. 我们原本要求的是集合 $\overline{A}$ 元素个数 $|\overline{A}|$. 在例 1 中，我们采用了间接的方法，即先求出 A 的元素个数 $|A|$，然后由 $|\overline{A}| = |S| - |A|$ 求出 $|\overline{A}|$.

一般地说，如果 A 是 S 的子集，$\overline{A}$ 是 A 对 S 的补集，则有

$$|\overline{A}| = |S| - |A|. \tag{1}$$

式(1)可以用所谓文恩图来理解. 集合 S 用平面上圆形区域 S 来表示，S 中元素个数理解为圆形区域 S 的面积. S 的子集 A 用区域 S 中的圆形区域 A 表示，如图 33-1. 则图 33-1 中阴影区域即是 A 对 S 的补集 $\overline{A}$. 很明显，A 和 $\overline{A}$ 没有公共元素，即 $A \cap \overline{A} = \phi$. 而且 $S = A \cup \overline{A}$，即 A 和 $\overline{A}$ 的元素全体即构成集合 S. 因此，$|S| = |A| + |\overline{A}|$. 于是式(1)成立.

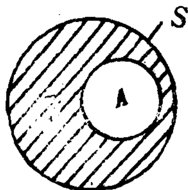


图 33-1

式(1)是容斥原理的最简单形式. 下

面将给出它的推广.

定理 1 设 A_1 和 A_2 是 S 的子集. 则

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1\cap A_2|. \qquad (2)$$

证 我们用所谓贡献法来证明. 假定要计算的是集合 S 的元素 $|S|$，我们可以考虑所有元素对 $|S|$ 的贡献：如果元素 x 是 S 的元素，则 x 对 $|S|$ 的贡献是 1；否则 x 对 $|S|$ 的贡献是 0. 所有元素 x 对 $|S|$ 的贡献之总和即是 S 的元素个数 $|S|$. 要证明等式(2)成立，我们只需要考察每个元素对式(2)的左端的贡献和对右端的贡献是否相同. 如果每个元素对左右两端的贡献都相同，则式(2)成立. 否则(2)式不成立.

设 x 是 S 中一个元素. 如果 x 既不是 A_1 的元素，也不是 A_2 的元素，则 x 出现在 $\overline{A}_2\cap\overline{A}_2$，因此 x 对(2)的左端的贡献为 1. 由于 x 不在 A_1, A_2 和 $A_1\cap A_2$ 中出现，因此 x 对 $|A_1|$, $|A_2|$ 和 $|A_1\cap A_2|$ 的贡献为 0. 由于 x 在 S 中出现，所以 x 对 $|S|$ 的贡献为 1. 于是 x 对右端的贡献是 $1-0-0+0=1$. 因此当 x 既不是 A_1 的元素，也不是 A_2 的元素时，x 对式(2)的两端的贡献相同；如果 x 是 A_1 的元素，但不是 A_2 的元素，则 x 对左端的贡献为 0，而 x 对 $|S|$, $|A_1|$, $|A_2|$ 和 $|A_1\cap A_2|$ 的贡献分别是 1, 1, 0, 0. 因此 x 对右端的贡献为 $1-1-0+0=0$. 所以 x 对(2)的两端的贡献相同；同理，如果 x 不是 A_1 的元素，但它是 A_2 的元素，则 x 对式(2)两端的贡献都是 0；最后，如果 x 是 A_1 和 A_2 的公共元素，则 x 对式(2)左端的贡献为 0，对右端的贡献为 $1-1-1+1=0$，即对两端贡献相同. 这就证明了式(2)成立.

定理 1 可以再推广. 设 $A_1, A_2\cdots, A_k$ 是 k 个集合. $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 的元素全体所构成的集合叫做 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 的并集，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$. $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 的公共元素全体构成的集合叫做 $A_1, A_2, \cdots A_k$ 的交集，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k$.

定理 2 设 $A_1, A_2, \cdots A_k$ 是集合 S 的 k 个子集合. 则

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_k|=|S|-\sum_{1<i<k}|A_i|+\sum_{1<i<j<k}|A_i\cap A_j|$$

$$-\sum_{1<i<j<l<k}|A_i\cap A_j\cap A_l|+\cdots$$

$$+(-1)^k|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|.$$

其中 $\sum\limits_{1<i<k}|A_i|=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_k|,$

$$\sum_{1<i<j<k}|A_i\cap A_j|=|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+\cdots$$

$$+|A_1\cap A_k|+|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_4|$$

$$+\cdots+|A_2\cap A_k|+\cdots+|A_{k-1}\cap A_k|,$$

$$\sum_{1<i<j<l<k}|A_i\cap A_j\cap A_l|=|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|$$

$$+\cdots+|A_1\cap A_2\cap A_k|+|A_2\cap A_3\cap A_4|+\cdots$$

$$+|A_2\cap A_3\cap A_k|+\cdots+|A_{k-2}\cap A_{k-1}\cap A_k|.$$

等等.

当 $k=2$ 时，式(3)即是式(2). 当 $k=3$ 时，式(3)化为：

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|=|S|-|A_1|-|A_2|-|A_3|+|A_1\cap A_2|$$
$$+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|. \tag{4}$$

证 我们用贡献法证明式(4)成立. 对一般的 k，定理 2的证明是相仿的.

设 x 是 S 中任意一个元素. 如果 x 不属于 A_1, A_2, A_3，则 x 对 $|S|$, $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$, $|A_1\cap A_2|$, $|A_1\cap A_3|$, $|A_2\cap A_3|$ 和 $|A_1\cap A_2\cap A_3|$ 的贡献依次是1, 0, 0, 0, 0, 0, 0和0. 因此x对式(4)右端的贡献是 $1-0-0-0+0+0+0-0=1$. 由于x在$\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, 所以 x对式(4)左端的贡献为 1. 即 x对式(4)两端的贡献相同；如果 x 不属于 A_1, A_2, A_3 的某一个，但属于其他两个，例如 x不在 A_1, 但在 A_2, A_3 中. 则 x不在$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$, 因此它对式 (4)左端的贡献是 0, 而 x 对 $|S|$, $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$, $|A_1\cap A_2|$, $|A_1\cap A_3|$, $|A_2\cap A_3|$ 和 $|A_1\cap A_2\cap A_3|$ 的贡献依次是 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1 和 0,

因此 x 对式(4)右端的贡献是 $1-0-1-1+0+0+1-0=0$, 即x对式(4)两端的贡献相同；如果 x 不属于A_1, A_2, A_3中的某两个，但属于余下的那一个，例如 x 不在 A_1, A_2 中，但在A_3中，则x对式(4)左端的贡献是 0，而对$|S|, |A_1|, |A_2|, |A_3|$, $|A_1\cap A_2|$, $|A_1\cap A_3|$, $|A_2\cap A_3|$和$|A_1\cap A_2\cap A_3|$的贡献依次是1, 0, 0, 1, 0, 0, 0和 0，因此 x 对式(4)右端的贡献是 $1-0-0-1+0+0+0-0=0$.即x对式(4)两端的贡献相同；如果 x 同属于 A_1, A_2, A_3, 则 x 对式(4)左端的贡献为 0，对右端各项的贡献依次是 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 和 1，因此 x 对式(4)右端的贡献是 $1-1-1-1+1+1+1-1=0$. 即 x 对式(4)两端总贡献相同.这就证明式(4)成立.

定理 2 通常叫做容斥原理. 它是计数中的一个极为重要且广泛应用的原理. 下面举几个例子来说明它的应用.

例 2 某人给 6 个不同的人写了 6 份信，每人一份. 并准备了 6 个写有收信人的地址的信封. 问有多少种投放信笺的方法，使得每份信笺和信封上的收信人都不相符？(波兰数学竞赛题.)

解 设 6 个人是 1, 2, …, 6.将 6 份信笺放进 6 个信封内，每个信封放入一份信笺，所有放法的集合记作S. 很明显，$|S|=6!$. 将写给第 i 个人的信放进写有第 i 个人的地址的信封，其他 5 份信笺放进 5 个信封的所有放法集合记作 A_i, $i=1,2,\cdots,6$. 很明显，A_i 是 S 的子集，并且$|A_i|=5!$. 而所求的放法总数为$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_6}|$. 由容斥原理(3)，

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_6}| &= |S| - \sum_{1\leqslant i\leqslant 6}|A_i| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 6}|A_i\cap A_j| \\
&- \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 6}|A_i\cap A_j\cap A_k| + \sum_{1\leqslant i<j<k<l\leqslant 6}|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l| \\
&- \sum_{1\leqslant i<j<k<l<m\leqslant 6}|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l\cap A_m| \\
&+ |A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_6|. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

由于$|A_i|=5!$, $i=1,2,\cdots,6$, 所以

$$\sum_{1\le i\le 6}|A_i| = 6\times 5!. \qquad \text{(i)}$$

而$|A_i\cap A_j| = 4!$，$1\leqslant i<j\leqslant 6$，并且和式$\sum\limits_{1\le i<j\le 6}|A_i\cap A_j|$中共有$C_6^2$项，因此

$$\sum_{1\le i<j\le 6}|A_i\cap A_j| = C_6^2\times 4!. \qquad \text{(ii)}$$

同样，$|A_i\cap A_j\cap A_k| = 3!$，$1\leqslant i<i<k\leqslant 6$．而和式$\sum\limits_{1\le i<j<k\le 6}|A_i\cap A_j\cap A_k|$中共有$C_6^3$项，因此

$$\sum_{1\le i<j<k\le 6}|A_i\cap A_j\cap A_k| = C_6^3\times 3!. \qquad \text{(iii)}$$

同理，

$$\sum_{1\le i<j<k<l\le 6}|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l| = C_6^4\times 2!, \qquad \text{(iv)}$$

$$\sum_{1\le i<j<k<l<m\le 6}|A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_l\cap A_m| = C_6^5\times 1!, \qquad \text{(v)}$$

$$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_6| = 1. \qquad \text{(vi)}$$

于是把$|S| = 6!$和(i)，(ii)，…，(vi)代入式(5)，即得到

$$\begin{aligned}&|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_6|\\ &= 6! - 6\times 5! + C_6^2\times 4! - C_6^3\times 3! + C_6^4\times 2! - C_6^5\times 2! + 1 = 265.\end{aligned}$$

例 2 和所谓错位排列有关．设$i_1, i_2, \cdots, i_n$是自然数$1, 2, \cdots, n$的一个排列．如果$i_1, i_2, \cdots, i_n$满足$i_1\neq 1, i_2\neq 2, \cdots, i_n\neq n$，也就是说，在排列$i_1i_2\cdots i_n$中，每个数都不排在第$k$个位置上，$k=1, 2, \cdots, n$，则$i_1i_2\cdots i_n$叫做自然数$1, 2, \cdots, n$的一个错位排列．所有错位排列的个数记作$D_n$．它叫做错位数．例 2 所求的即是$D_6$．

利用容斥原理(3)，可以证明

定理 3　对正整数n，

$$D_n = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{2}{n!}\right). \qquad (6)$$

定理 3 的证明留给读者作习题．

例 3　由数字 1，2 和 3 组成n位数，要求n位数中 1，2 和 3 的每一个至少出现一次．求所有这种n位数的个数．（匈牙利数

学竞赛题.)

解 由数字 1, 2 和 3 组成的 n 位数全体构成的集合记作 S. 很明显，$|S|=3^n$. S 中所有不含 1 的 n 位数的集合记作 A_1. A_2 和 A_3 与 A_1 同样理解.于是，$\overline{A_i}$是 S 中所有含有数字 i 的 n位数的集合，$i=1,2,3$. 因此$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}$即是 S 中同时含有数字 1, 2 和 3 的 n 位数全体构成的集合. 要求的就是$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|$. 由容斥原理(4),

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}| = |S| - |A_1| - |A_2| - |A_3| \\
+ |A_1\cap A_2| + |A_1\cap A_3| + |A_2\cap A_3| \\
- |A_1\cap A_2\cap A_3|. \qquad \text{(i)}
\end{aligned}
$$

由于 A_i 是 S 中所有不含数字 i 的 n 位数集合，因此$|A_i|=2^n$, $i=1,2,3$. 而 $A_i\cap A_j$ 是所有不含数字 i 和 j 的 n 位数集合. 所以 $|A_i\cap A_j|=1$, $1\leqslant i<j\leqslant 3$. 显然 $A_1\cap A_2\cap A_3=\phi$，这里 ϕ 是空集. 即$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$. 于是由(i)得到

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}| = 3^n - 3\times 2^n + 3.$$

容斥原理(3)可以写成如下形式.

定理 4 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是集合 S 的子集. 则

$$
\begin{aligned}
|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k| = \sum_{1\le i\le k}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le k}|A_i\cap A_j| \\
+ \sum_{1\le i<j<l\le k}|A_i\cap A_j\cap A_l| + \cdots \\
+ (-1)^{k-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|. \text{(7)}
\end{aligned}
$$

证 根据容斥原理(3)，只要证明下式成立即可：

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_k}| = |S| - |A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k|. \qquad \text{(i)}$$

这里采用贡献法来证明.

设 x 是集合 S 中的元素. 如果 x 不在每个 A_i 中，$i=1, 2, \cdots, k$，则 x 在$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_k}$ 中，因此 x 对式(i) 左端的贡献为 1. 而 x 不在 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$ 中，所以 x 对 $|S|$ 和 $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k|$的贡献分别是 1 和0，即$x$对式(i)右端的贡献为$1-0=1$.

因此当 x 不在每个 A_i 中，$i=1,2,\cdots,k$，x 对式(i)两端的贡献相同；如果 x 在$A_1,A_2,\cdots,A_k$ 的某些子集中，例如在 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 中，但不在 $A_{m+1},\cdots,A_k$ 中，$1\leqslant m\leqslant k$，则 x 对式(i)左端的贡献为 0，对右端的贡献为 $1-1=0$. 因此 x 对式(i)两端的贡献相同. 这就证明了式(i)成立.

式(7)也叫做容斥原理. 当 $k=2,3$ 时，式(7)化为：

推论 1 设 A,B 是两个集合，则

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|. \tag{8}$$

推论 2 设 A,B,C 是三个集合，则

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|. \tag{9}$$

例 4 给定 1978 个集合，每个集合都恰含有 40个元素，每两个集合都恰有一个公共元素. 求这 1978 个集合的并集所含元素的个数.

解 设 1978 个集合是 $A_1,A_2,\cdots,A_{1978}$. 已知$|A_i|=40$，$i=1,2,\cdots,1978$；$|A_i\cap A_j|=1$，$1\leqslant i,j\leqslant 1978$. 欲求的是$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{1978}|$.

由容斥原理(7)，

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{1978}|=\sum_{1\leqslant i\leqslant 1978}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 1978}|A_i\cap A_j|$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 1978}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots$$
$$+(-1)^{1978}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{1978}|.$$

于是问题在于求出 $A_1,A_2,\cdots,A_{1978}$ 中若干个集合之交集所含元素的个数.

考虑集合 A_1. 由条件，A_1 和其他 1977 个集合都相交. 如果 A_1的每个元素都至多属于 49 个集合. 则和 A_1 相交的集合至多有 $40\times 49=1960$ 个. 这和 A_1 与其他 1977 个集合都相交矛盾. 因此 A 中必有元素 a，它至少属于其他50 个集合，设它们是A_2，

$A_3, \cdots A_{51}$. 设 B 是 $A_{52}, A_{53}, \cdots, A_{1978}$ 中的一个集合. 设 a 不属于 B. 由已知条件，B 和$A_1, A_2, \cdots A_{51}$中每一个都恰有一个公共元素，这些公共元素又不能是 a，因此这些公共元素两两不同，于是 B 至少含有 51 个元素，和$|B|=40$ 矛盾. 所以 a 在 B中. 这说明，a 是 $A_1, A_2, \cdots, A_{1978}$的公共元素. 由于每两个集合恰有一个公共元素，所以 $A_1, A_2, \cdots, A_{1978}$ 中任意个集合的公共元素都恰有一个，即为 a，因此，

$$\sum_{1<i<j<k<1978} |A_i \cap A_j \cap A_k| = C_{1978}^3,$$

$$\sum_{1<j<j<k<l<1078} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = C_{1978}^4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{1<i_1<i_2<\cdots<i_m<1978} |A_i \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{im}| = C_{1978}^m.$$

于是

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{1978}| &= 40C_{1978}^1 - C_{1978}^2 + C_{1978}^3 - C_{1078}^4 \\ &\quad + \cdots + (-1)^{1977}C_{1978}^{1978} \\ &= 36 \times 1978 + 1 - [1 - C_{1978}^1 \\ &\quad + C_{1978}^2 - \cdots + (-1)^{1973}C_{1978}^{1978}] \\ &= 77143.\end{aligned}$$

习　题　33

1. 在小于 1000 的正整数中，既不能被 5 整除也不能被 7 整除的有多少个?（莫斯科数学竞赛题.）
2. 给定 $2n$ 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_{2n}, n>1$. 任意三点不共线，设 M 是以给定的点为端点的线段构成的集合，$|M| \geqslant n^2+1$，证明，存在以A_r, A_s, A_t 为顶点且边在 M 中的三角形. 还证明，如果 M 中元素个数不超过 n^2，则结论不再成立.（奥地利1973年数学竞赛题.）
3. 给定 1987 个集合，每个集合都恰有 45 个元素，每两个集合的并集都恰有 89 个元素. 求这 1987 个集合的并集所含元素个数.

第34讲 组合恒等式(一)

史济怀

在第34讲和第35讲中，我们将介绍计算含有组合数的和式以及证明组合恒等式的一些常用的方法．对于一名希望在数学竞赛中取得好成绩的学生来说，熟练地掌握组合数的性质，并能灵活地运用它们来解决各种问题，是十分必要的！

计算含有组合数的和式和证明组合恒等式的基本工具是下面六个基本的组合恒等式：

(i) $C_n^k=C_n^{n-k}$；

(ii) $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$；

(iii) $C_n^k=\frac{n}{k}C_{n-1}^{k-1}$；

(iv) $C_n^kC_k^m=C_n^mC_{n-m}^{k-m}$；

(v) $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$；

(vi) $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots+(-1)^nC_n^n=0$.

在这六个基本恒等式中，前两个是大家熟知的；最后两个只要在二项式定理中分别取 $a=b=1$ 和 $a=1,b=-1$ 就能得到；第三个则是第四个的特例：只要在(iv)中取 $m=1$，就得到(iii)．现在来证明(iv)．根据组合数的计算公式，有

$$C_n^kC_k^m=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{m!(k-m)!}=\frac{n!}{m!(n-k)!(k-m)!},$$

$$C_n^mC_{n-m}^{k-m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!}$$

$$=\frac{n!}{m!(n-k)!(k-m)!}.$$

由此即得

$$C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m},$$

即(iv)成立.

熟练掌握上面六个基本恒等式，经过归纳、递推、迭代等方法，便能算出一批含有组合数的和式的值，或给出一些较为复杂的组合恒等式的证明.

因为下面经常要与和式打交道，为方便起见，我们引进求和记号$\sum$(读作西格马).

我们把和式 $C_1+C_2+\cdots+C_n$ 简记为$\sum\limits_{i=1}^{n} C_i$，这里 C_i 表示一般项，$\sum$上下的数字表示 i 从 1 加到 n，i 是求和指标，只起辅助作用，也可换成别的记号．例如

$$1+2+\cdots+n=\sum_{i=1}^{n} i=\sum_{k=1}^{n} k,$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2=\sum_{j=1}^{n} j^2,$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}=\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\sum_{r=1}^{99}\frac{1}{r(r+1)}.$$

利用这个记号，二项式定理可以简记为

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

基本恒等式(v)，(vi)可分别写为

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k=2^n,\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k=0.$$

在下面的讨论中，有时需要更换求和指标，这时必须注意同时更换求和的上下限．例如

$$\sum_{n=0}^{s} a_n x^n=\sum_{n=2}^{s+2} a_{n-2} x^{n-2}=\sum_{k=1}^{s+1} a_{k-1} x^{k-1}.$$

下面将通过一系列的例子来说明，如何运用六个基本恒等式

计算含有组合数的和式的值以及证明组合恒等式。

例 1 计算 $S_{n,m}=\sum_{n=0}^{m}(-1)^k C_n^k,\ m\leqslant n$

解 从基本恒等式(vi)知道，当 $m=n$ 时，

$$S_{n,n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k=0.$$

现设 $m<n$，利用基本恒等式(ii)，$S_{n,m}$ 可以写成

$$\begin{aligned}S_{n,m}&=1+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k C_n^k=1+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k(C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1})\\&=1-(C_{n-1}^1+C_{n-1}^0)+(C_{n-1}^2+C_{n-1}^1)-\cdots\\&\quad+(-1)^m(C_{n-1}^m+C_{n-1}^{m-1})=(-1)^m C_{n-1}^m.\end{aligned}$$

这样，就得到等式

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^k=\begin{cases}0, & m=n,\\(-1)^m C_{n-1}^m, & m<n.\end{cases}$$

例 2 计算 $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}C_n^k$.

解 在二项式定理

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k$$

中取 $x=\frac{1}{2}$，即得

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}C_n^k=\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

例 3 计算 $\sum_{n=0}^{n}kC_n^k$.

解 在这个和式中，k 是流动指标，它和 C_n^k 相乘，使求和产生了困难. 但是根据基本恒等式(iii)，

$$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1},$$

而 n 是一个固定的数，它可以提到求和号外面，这样就得到

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = \sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} = n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}$$

$$= n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \cdots + C_{n-1}^{n-1}) = n2^{n-1}.$$

这里最后的等式利用了基本恒等式(v).

例 4 求和式

$$\sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k = C_n^1 + 2^2C_n^2 + \cdots + n^2C_n^n$$

之值.（美国第23届普特南数学竞赛试题，1962年.）

解 先利用一次基本恒等式(iii)：$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ 得

$$\sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k = n\sum_{k=1}^{n} kC_{n-1}^{k-1}$$

$$= n\sum_{k=1}^{n} (k-1)C_{n-1}^{k-1} + n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}$$

$$= n\sum_{k=2}^{n} (k-1)C_{n-1}^{k-1} + n2^{n-1}. \quad (1)$$

这里已利用了基本恒等式(v). 对右边的和式再用一次基本恒等式(iii)：

$$(k-1)C_{n-1}^{k-1} = (n-1)C_{n-2}^{k-2},$$

便得

$$\sum_{k=2}^{n} (k-1)C_{n-1}^{k-1} = (n-1)\sum_{k=1}^{n} C_{n-2}^{k-2} = (n-1)2^{n-2}.$$

把它代入(1)，便得到所求和式的值为

$$\sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

例 5 计算

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}C_n^k, \quad q_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1}C_n^k.$$

解 和例 3 一样，计算这两个和式的主要困难是在每个组合

前有一个因子$\frac{1}{k+1}$. 不过利用基本恒等式(iii)，还是可以把它去掉的. 事实上，由(iii)得 $C_{n+1}^{k+1}=\frac{n+1}{k+1}C_n^k$，由此即得

$$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1},$$

因而有

$$p_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1),$$

$$p_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_{n+1}^{k+1}=\frac{1}{n+1}.$$

例 6 证明

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}. \qquad (2)$$

证 看上去(2)的左端和例 5 的 q_n 差不多，但现在不能直接用(iii). 不过容易想到通过(ii)来使用(iii). 事实上，先用(ii)，再用(iii)可得

$$\frac{1}{k}C_n^k=\frac{1}{k}(C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1})=\frac{1}{k}C_{n-1}^k+\frac{1}{n}C_n^k.$$

于是，若记 $f_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k$，则

$$\begin{aligned}f_n&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_{n-1}^k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}C_n^k+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\\&=f_{n-1}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k=f_{n-1}+\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

这里最后的等式利用了基本恒等式(vi). 从这个递推关系可得

$$f_{n-1}=f_{n-2}+\frac{1}{n-1},\cdots,f_2=f_1+\frac{1}{2},f_1=1.$$

所以

$$f_n=f_{n-1}+\frac{1}{n}=f_{n-2}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}=\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

这就是要证明的(2).

例 7 证明 $\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{k}=2^{2n-1}+\frac{1}{2}C_{2n}^{n}$.

证 记 $a_n=\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{k}$, $b_n=\sum_{k=n+1}^{2n}C_{2n}^{k}$, 由基本恒等式(v)得

$$a_n+b_n=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^{k}=2^{2n}. \tag{5}$$

另一方面，对 b_n 的求和指标作变换 $k=2n-r$，得

$$b_n=\sum_{k=n+1}^{2n}C_{2n}^{k}=\sum_{r=0}^{n-1}C_{2n}^{2n-r}=\sum_{r=0}^{n-1}C_{2n}^{r}=\sum_{r=0}^{n}C_{2n}^{r}-C_{2n}^{n}=a_n-C_{2n}^{n},$$

代入(5)，得 $2a_n-C_{2n}^{n}=2^{2n}$，移项即得

$$a_n=2^{2n-1}+\frac{1}{2}C_{2n}^{n}.$$

这就是要证明的恒等式. 这里的证明方法和前面几个例子不同，为了计算 a_n，我们引进一个辅助数列 b_n，通过 a_n 和 b_n的关系，最终才得到 a_n 的值. 当然，引进怎样的 b_n，就是解题的技巧所在.

例 8 证明 $A_{mn}=\sum_{k=m}^{n}(-1)^kC_n^kC_k^m=(-1)^m\delta_{mn}, m\leqslant n.$

这里 $\delta_{mn}=\begin{cases}1, m=n.\\0, m\neq n.\end{cases}$

证 当 $m=n$ 时，上面的和式只有一项

$$A_{mn}=(-1)^mC_m^mC_m^m=(-1)^m.$$

故等式成立. 现设 $m<n$，利用基本恒等式(iv)得

$$A_{mn}=\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k}C_{n}^{m}C_{n-m}^{k-m}=C_{n}^{m}\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k}C_{n-m}^{k-m}.$$

对上式的求和指标作变换 $k-m=j$，则当从 m 变到 n时，i 从 0 变到 $n-m$. 于是

$$A_{mn}=C_{n}^{m}\sum_{j=0}^{n-m}(-1)^{m+j}C_{n-m}^{j}=(-1)^{m}C_{n}^{m}\sum_{j=0}^{n-m}(-1)^{j}C_{n-m}^{j}=0.$$

最后一步利用了基本恒等式(vi).

证明这个恒等式的关键是基本恒等式(iv)，它把两个因子都和变动指标 k 有关的乘积 $C_{n}^{k}C_{k}^{m}$变成了只有一个因子与 k 有关的乘积 $C_{n}^{m}C_{n-m}^{k-m}$. 这样，C_{n}^{m} 就可作为公因子提出来，和式得以简化. 这里利用(iv)的目的和例 5 中利用(iii)的目的是一样的，都是为了把和式化简.

例 9 证明恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}2^{2n-2k}C_{2n-k+1}^{k}=n+1. \tag{6}$$

证 记(6)左端的和式为 a_n，利用基本恒等式(iii)，a_n 可写为

$$\begin{aligned}a_{n}&=2^{2n}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}2^{2n-2k}(C_{2k-k}^{k}+C_{2n-k}^{k-1})\\&=2^{2n}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}2^{2n-2k}C_{2n-k}^{k}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}2^{2n-2k}C_{2n-k}^{k-1}\\&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}2^{2n-2k}C_{2n-k}^{k}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}2^{2n-2k}C_{2n-k}^{k-1}.\end{aligned} \tag{7}$$

对上式第二个和式作指标变换 $k=r+1$ 得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}2^{2n-2k}C_{2n-k}^{k-1}&=\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r+1}2^{2(n-1)-2r}C_{2(n-1)-r+1}^{r}\\&=-a_{n-1}.\end{aligned}$$

如果令 $b_{n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}2^{2n-2k}C_{2n-k}^{k}$，则(7)可写为

$$b_n = a_n + a_{n-1}. \tag{8}$$

在 b_n 中再用基本恒等式(ii)得

$$b_n = 2^{2n} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k 2^{2n-2k}(C_{2n-k-1}^{k} + C_{2n-k-1}^{k-1}) + (-1)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k-1}^{k} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k-1}^{k-1}$$

$$= 4\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k 2^{2(n-1)-2k} C_{2(n-1)-k+1}^{k}$$

$$+ \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{r+1} 2^{2(n-1)-2r} C_{2(n-1)-r}^{r} = 4a_{n-1} - b_{n-1}. \tag{9}$$

从(8)和(9)得

$$a_n + a_{n-1} = 4a_{n-1} - b_{n-1} = 4a_{n-1} - a_{n-1} - a_{n-2} = 3a_{n-1} - a_{n-2},$$

由此得递推关系

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}. \tag{10}$$

显然 $a_0 = 1, a_1 = 2$，于是从(10)得

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} = a_{n-2} - a_{n-3} = \cdots = a_1 - a_0 = 1.$$

由此得

$$a_n = a_{n-1} + 1 = a_{n-2} + 2 = \cdots = a_0 + n = n + 1.$$

这就是要证明的等式(6).

从(6)和(8)又可得一新的恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k}^{k} = 2n + 1. \tag{11}$$

如果把(11)中的流动指标换成 $n-r$，又得恒等式

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r} 2^{2r} C_{n+r}^{2r} = 2n + 1.$$

例 9 的恒等式证明起来有一定的难度，象例 7 那样，为了计算 a_n，我们引进了 b_n，不过这里 b_n的构造比例 7 要困难些.

思 考 题

1. C_n^k的计算公式有什么？

2. 所谓的基本组合恒等式是指哪些等式？

3. 六个基本组合恒等式在计算含有组合数的和式和证明组合恒等式时是如何起作用的？

习 题 34

计算下列和式的值：

1. $\sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k$.

2. $\sum_{k=0}^{n} (k+1) C_n^k$.

3. $\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n-1}^k$.

4. $\sum_{k=0}^{n} k C_{2n}^k$.

证明下列恒等式：

5. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k x^k = \frac{(1+x)^{n+1}-1}{(n+1)x}$.

6. $\sum_{k=m}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1} C_n^k C_k^m = \frac{(-1)^m}{n+1}$.

7. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_n^k [1-(1-x)^k] = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}$.

8. $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k = \frac{2^{2n}}{2n+1} (C_{2n}^n)^{-1}$.

9. $\sum_{k=0}^{n} k C_{2n+1}^k = (2n+1) 2^{2n-1} - \frac{2n+1}{2} C_{2n}^n$.

10. $\sum_{k=m}^{n} C_n^k C_k^m x^k (1-x)^{n-k} = C_n^m x^m$.

第35讲　组合恒等式(二)

史 济 怀

在第34讲中，我们提出了六个基本组合恒等式，利用它们便可算出一批含有组合数的和式的值或证明一些较为复杂的组合恒等式. 在这一讲中，我们还要介绍另外一些方法，把这些方法和六个基本恒等式结合起来使用，便可解决更多的问题.

一、比较系数法

第34讲中曾经提到过，组合数C_n^k是二项式展开式中各项的系数，因此有可能通过比较多项式的系数得到新的组合恒等式.

例1　证明 $\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=C_{2n}^n$.

证　由二项式定理 $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k$，所以

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n}&=(C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n)(C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n)\\&=\cdots+(C_n^0C_n^n+C_n^1C_n^{n-1}+\cdots+C_n^nC_n^0)x^n+\cdots.\end{aligned}$$

也就是说，在$(1+x)^{2n}$的展开式中，x^n的系数是

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^kC_n^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2.$$

但另一方面，根据二项式定理，$(1+x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^kx^k$，即$x^n$的系数是$C_{2n}^n$. 由此即得

$$\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=C_{2n}^n. \qquad (1)$$

这就是要证明的等式.

例2　计算$\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}C_n^k$.

解　由二项式定理

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k,\quad (1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k x^k.$$

所以

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n-1}&=(1+x)^n(1+x)^{n-1}\\&=(C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n)(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1x+\cdots+C_{n-1}^{n-1}x^{n-1})\\&=\cdots+(C_{n-1}^0C_n^{n-1}+C_{n-1}^1C_n^{n-2}+\cdots+C_{n-1}^{n-1}C_n^0)x^{n-1}+\cdots\\&=\cdots+(C_{n-1}^0C_n^1+C_{n-1}^1C_n^2+\cdots+C_{n-1}^{n-1}C_n^n)x^{n-1}+\cdots.\end{aligned}$$

即 $(1+x)^{2n-1}$ 的展开式中 x^{n-1} 的系数是

$$C_{n-1}^0C_n^1+\cdots+C_{n-1}^{n-1}C_n^n=\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}C_n^k.$$

另一方面，由二项式定理知$(1+x)^{2n-1}$的展开式中 x^{n-1}的系数是C_{2n-1}^{n-1}，因而得

$$\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}C_n^k=C_{2n-1}^{n-1}. \qquad (2)$$

有了(1)，(2)两个等式后，我们就可证明

例 3 对任何正整数 n，证明

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left\{\left(1-\frac{2k}{n}\right)C_n^k\right\}^2=\frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}. \qquad (3)$$

这里$\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$表示$\dfrac{n-1}{2}$的整数部分.（美国第 26 届普特南数学竞赛试题，1965年.）

证 先证明

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2=2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2. \qquad (4)$$

对(3)左端的和式作指标变换 $l=n-k$，则当 $k=0$ 时，$l=n$；当 $k=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$时，$l=n-\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$，和式变成

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2=\sum_{l=n-\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{n}\left(\frac{2l-n}{n}C_n^{n-l}\right)^2$$

$$=\sum_{l=n-\left[\frac{n-1}{2}\right]}^{n}\left(\frac{n-2l}{n}C_n^l\right)^2. \qquad (5)$$

如果 n 是奇数，则 $n-1$ 为偶数，因而$\left[\frac{n-1}{2}\right]=\frac{n-1}{2}$，

$n-\left[\frac{n-1}{2}\right]=n-\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}$，(5)就变为

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2=\sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2.$$

这样

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2=\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}+\sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n}=2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2.$$

即(4)成立. 如果n是偶数，则$n-1$为奇数，因而$\left[\frac{n-1}{2}\right]=\frac{n-2}{2}$，

$n-\left[\frac{n-1}{2}\right]=n-\frac{n-2}{2}=\frac{n+2}{2}$，(5)变为

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2=\sum_{k=\frac{n+2}{2}}^{n}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2.$$

由于当 $k=\frac{n}{2}$时，$\frac{n-2k}{n}C_n^k=0$，因而

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2=\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}+\sum_{k=\frac{n+2}{2}}^{n}=2\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2.$$

这就证明了在 n 为偶数的情况下，(4)也成立. 现在只要计算(4)的左端就行了.

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{2k}{n}\right)^2(C_n^k)^2$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2-\frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n}k(C_n^k)^2+\frac{4}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(kC_n^k)^2$$

$$=a_1+a_2+a_3.$$

由例 1 知，$a_1=C_{2n}^n$，为了计算 a_3，利用基本恒等式(iii)得

$$a_3=\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kC_n^k)^2=\frac{4n^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(C_{n-1}^{k-1})^2=4C_{2n-2}^{n-1}.$$

利用基本恒等式(iii)，可把 a_2 改写为

$$a_2=-\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}k(C_n^k)^2=-4\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}C_n^k=-4C_{2n-1}^{n-1}.$$

这里已经利用了等式(2)，把 a_1, a_2, a_3 加起来得

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n-2k}{n}C_n^k\right)^2=C_{2n}^n-4C_{2n-1}^{n-1}+4C_{2n-1}^{n-1}$$

$$=C_{2n}^n-4C_{2n-2}^{n-2}=\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{4(2n-2)!}{(n-2)!n!}$$

$$=\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}\left(\frac{2n(2n-1)}{n^2}-\frac{4(n-1)}{n}\right)=\frac{2}{n}C_{2n-2}^{n-1}.$$

从(4)即得(3).

从整个证明过程来看，普特南数学竞赛的这道试题是有一定难度的，但对熟悉组合数运算的学生来说，这道题也没有什么特殊的技巧.

二、单位根的应用

这一节我们将讨论具有一定间隔的连续的组合数和的计算方法，即要求下面这种类型的和：

$$C_n^0+C_n^3+C_n^6+C_n^9+\cdots\cdots, \tag{6}$$

$$C_n^2+C_n^6+C_n^{10}+C_n^{14}+\cdots\cdots. \tag{7}$$

这种和的一般形状是

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]}C_n^{r+km}. \tag{8}$$

(6)和(7)分别是$r=0, m=3$ 和$r=2$，$m=4$ 的特殊情形.

计算(8)的主要工具是复数中的单位根. 我们知道，方程$z^m=1$有m个根，它们是

$z=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m}=e^{i\frac{2k\pi}{m}}, k=0, 1, \cdots, m-1$. 称$\omega_k=e^{i\frac{2k\pi}{m}}, k=0,1,\cdots,m-1$为$m$次单位根. ω_k有下列重要性质：

$$\sum_{k=0}^{m-1}\omega_k^s=\begin{cases} m, \text{如果} S \text{是} m \text{的倍数}, \\ 0, \text{如果} S \text{不是} m \text{的倍数}. \end{cases} \tag{9}$$

事实上，如果S是m的倍数，记$S=qm$，q是整数，那么

$$\omega_k^s=\left(e^{i\frac{2k\pi}{m}}\right)^s=e^{2kq\pi i}=\cos 2kq\pi+i\sin 2kq\pi=1,$$

所以$\sum\limits_{k=0}^{m-1}\omega_k^s=m$. 如果$S$不是$m$的倍数，那么

$$\sum_{k=0}^{m-1}\omega_k^s=\sum_{k=0}^{m-1}\left(e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right)^s=\sum_{k=0}^{m-1}\left(e^{\frac{2s\pi i}{m}}\right)^k=\frac{1-e^{2s\pi i}}{1-e^{\frac{2s\pi i}{m}}}=0.$$

这就证明了(9).

现在利用(9)，先证明一个一般的公式.

例 4 证明

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]}C_n^{r+km}x^{r+km}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(\omega_k)^{-r}(1+x\omega_k)^n. \tag{10}$$

这里$\omega_k=e^{\frac{2k\pi}{m}i}$，$r$，$m$为非负整数，且$r\leqslant m$.

证 由二项式定理

$$(1+x\omega_k)^n=\sum_{l=0}^{n}C_n^l x^l\omega_k^l,$$

(10)的右端可写为

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(\omega_k)^{-r}(1+x\omega_k)^n &=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(\omega_k)^{-r}\sum_{l=0}^{n}C_n^l x^l\omega_k^l\\ &=\frac{1}{m}\sum_{l=0}^{n}C_n^l x^l\sum_{k=0}^{m-1}\omega_k^{l-r}.\end{aligned}$$

根据(9)，当 $l-r=qm$ 时，$\sum_{k=0}^{m-1}\omega_k^{l-r}=m$；当 $l-r\neq qm$ 时，$\sum_{k=0}^{m-1}\omega_k^{l-r}=0$. 因此上面的和式，只有当 $l=r+qm$ 时，对应的项才不为 0. 由于 $l=r+qm\leqslant n$，即 $q\leqslant\frac{n-r}{m}$，所以当 l 从 0 变到 n 时，q 从 0 变到 $\left[\frac{n-r}{m}\right]$，于是得

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(\omega_k)^{-r}(1+x\omega_k)^n=\sum_{q=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]}C_n^{r+qm}x^{r+qm}.$$

这就是要证明的(10).

从(10)便可得

例 5 证明当 $r\leqslant m$ 时，有等式

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]}C_n^{r+km}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(2\cos\frac{k\pi}{m}\right)^n\cos\frac{(n-2r)k\pi}{m}. \tag{11}$$

证 在(10)中取 $x=1$ 得

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]}C_n^{r+km}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(\omega_k)^{-r}(1+\omega_k)^n. \tag{12}$$

因为

$$\begin{aligned}(\omega_k)^{-r}(1+\omega_k)^n&=e^{-\frac{2rk\pi i}{m}}\left(1+e^{\frac{2k\pi i}{m}}\right)^n\\&=e^{-\frac{2rk\pi i}{m}}e^{\frac{kn\pi i}{m}}\left(e^{-\frac{k\pi i}{m}}+e^{\frac{k\pi i}{m}}\right)^n\\&=e^{\frac{k\pi i}{m}(n-2r)}2^n\left(\cos\frac{k\pi}{m}\right)^n\\&=\left(2\cos\frac{k\pi}{m}\right)^n\left(\cos\frac{(n-2r)k\pi}{m}+i\sin\frac{(n-2r)k\pi}{m}\right),\end{aligned}$$

所以(12)的右端为

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(\omega_k)^{-r}(1+\omega_k)^n$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(2\cos\frac{k\pi}{m}\right)^n\left(\cos\frac{(n-2r)k\pi}{m}+i\sin\frac{(n-2r)k\pi}{m}\right).$$

在(12)的两端取实部，即得

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]}C_n^{r+km}=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\left(2\cos\frac{k\pi}{m}\right)^n\cos\frac{(n-2r)k\pi}{m},$$

这就是要证明的等式(11)。

在(11)中取 $r=0$，$m=2$ 得

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots+C_n^{2\left[\frac{n}{2}\right]}=2^{n-1}.$$

在(11)中取 $r=0$，$m=3$ 可得

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]}C_n^{3k}=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

若取 $r=0$，$m=4$ 可得

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{4}\right]}C_n^{4k}=\frac{1}{4}\left(2^n+2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}\right).$$

若在(11)中分别取 $r=1$，$m=3$ 和 $r=2$，$m=3$ 又可得

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]}C_n^{1+3k}=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n-2}{3}\pi\right),$$

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{3}\right]}C_n^{2+3k}=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right).$$

三、与组合数有关的问题

例 6 设 m 与 n 是任意的非负整数，试证

$$a_{m,n}=\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$$

是一个整数。(第 14 届国际数学竞赛试题，1972 年。)

分析 这个题目从表面上看与组合数无关，但当 $n=0$ 时，$a_{m,0}=\frac{(2m)!}{m!\,m!}=C_{2m}^m$ 是一个组合数，它当然是一个整数. 由此启

发我们，是否能把 $a_{m,n}$ 写成若干个组合数的整系数线性组合？若能做到这一点，那么因为每个组合数是整数，从而得知它的整系数线性组合也是整数，因而 $a_{m,n}$ 是一个整数．沿着这一线索思考下去，就不难得到证明．

证 通过直接验证，可得递推公式

$$a_{m,n}=4a_{m,n-1}-a_{m+1,n-1}. \tag{13}$$

上式说明，$a_{m,n}$ 可以通过 $a_{m,n-1}$ 和 $a_{m+1,n+1}$ 的整系数线性组合来表示，这里 m 的指标虽然增大了，但 n 的指标都下降了．同样地，$a_{m,n-1}$ 和 $a_{m+1,n-1}$ 可以分别通过 $a_{m,n-2}$, $a_{m+1,n-2}$ 和 $a_{m+1,n-2}$, $a_{m+2,n-2}$ 的整系数线性组合来表示．每递推一次，n 就降为 $n-1$，继续做下去，最终可得

$$a_{m,n}=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k a_{m+k,0}$$

这里 λ_k 是确定的整数．由于 $a_{m+k,0}=C_{2(m+k)}^{m+k}$ 是整数，因而 $a_{m,n}$ 是整数．

例 7 试证对任意的自然数 n，和数

$$a_n\sum_{k=0}^{n}2^{3k}C_{2n+1}^{2k+1}$$

不能被 5 整除．（第 16 届国际数学竞赛试题，1974 年）

分析 初看起来，这道题很难下手．但仔细分析，a_n 的表达式和二项式展开有点相似，若能把它表成某个数的 n 次方，就容易讨论了．

证 引进

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}2^{3k},$$

于是

$$\begin{aligned}\sqrt{8}a_n+b_n&=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}(\sqrt{8})^{2k+1}+\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}(\sqrt{8})^{2k}\\&=\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}(\sqrt{8})^{k}=(\sqrt{8}+1)^{2n+1}.\end{aligned}$$

（这样我们确实把$\sqrt{8}a_n+b_n$表成了$(\sqrt{8}+1)$的$2n+1$次方，但因表达式是出现了$\sqrt{8}$这样的无理数，还是不便于讨论，这时自然想到）

$$\sqrt{8}a_n-b_n=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}(\sqrt{8})^{2k+1}-\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}(\sqrt{8})^{2k}$$
$$=(\sqrt{8}-1)^{2n+1}.$$

把这两式相乘就得

$$8a_n^2-b_n^2=7^{2n+1}. \tag{14}$$

（从这个式子出发就便于讨论了.）把(14)写成

$$8a_n^2=b_n^2+7^{2n+1}. \tag{15}$$

如果a_n能被5整除，当然$8a_n^2$也能被5整除. 从(15)得知，$b_n^2+7^{2n+1}$也能被5整除. 但

$$7^{2n}=49^n=(50-1)^n=5q+(-1)^n,$$

这是因为用二项式定理展开后，除了最后一项为$(-1)^n$外，其他项都是5的倍数，记为$5q$. 于是

$$7^{2n+1}=(5+2)(5q+(-1)^n)=5q'+2(-1)^n.$$

这说明7^{2n+1}用5除所得的余数是2或-2，这就要求b_n^2用5除所得的余数也是2或-2. 但b_n^2是一个平方数，而

$$1^2=1,\ 2^2=4,\ 3^2=9,\ 4^2=16,$$

它们中间每一个用5除，所得的余数只能是1或-1，因而$b_n^2+7^{2n+1}$不能被5整除，从而a_n也不能被5整除.

做这个题时，第一个想法是把a_n的表达式算出来，这并不困难. 但即使写出了表达式，还是不能证明要求的结论. 这里引进b_n，并利用二项式定理把a_n, b_n的关系用(15)表达出来，这是技巧很高的一步. 有了(15)，问题就迎刃而解了.

思考题

1. 试用比较系数法证明$C_n^k=C_n^{n-k}$.

2. 在计算 $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-r}{m}\right]} C_n^{r+km}$ 时，用了单位根的什么性质？

3. 不要用公式(11)，直接用单位根的性质来导出 $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} C_n^{3k}$ 的求和公式。

习 题 35

用比较系数法证明下列恒等式：

1. $\sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} C_n^k = C_{2n}^{n-1}$.

2. $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_m^k C_m^{2n-k} = (-1)^n C_m^n$.

3. $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k C_m^k = nC_{n+m-1}^n$.

4. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (C_n^k)^2 = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}}, & \text{如果 } n \text{ 是偶数；} \\ 0, & \text{如果 } n \text{ 是奇数.} \end{cases}$

利用公式(11)证明下列等式：

5. $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]} C_n^{3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right)$.

6. $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{4}\right]} C_n^{4k} = \frac{1}{4}\left(2^n + 2(\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}\right)$.

7. $\sum_{k=0}^{n} C_n^{4k} = \frac{1}{4}(2^{4n} + (-1)^n 2^{2n+1})$.

8. $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{3}\right]} C_n^{1+3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right)$.

9. $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-2}{3}\right]} C_n^{2+3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right)$.

10. $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)^n = \frac{n}{2^{n-1}}$.

第36讲　递归数列(一)

史 济 怀

在组合恒等式部分，为了要计算

$$a_r = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k+1}^{k},$$

我们引进了一个新的数列

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k}^{k},$$

用 b_n 作桥梁，导出了 a_n 的递推关系

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \tag{1}$$

由它和初始条件 $a_0 = 1$，$a_1 = 2$，我们得到 $a_n = n+1$.

这是求某些数列的一般表达式的一种方法：先求出该数列满足的递推关系，然后根据这递推关系和初始条件求出这数列的表达式. 让我们再来看一个经典的例子.

菲波那契在1202年提出了下面的问题：

假定一对兔子每隔一个月生一对一雌一雄的小兔，每对小兔在两个月以后也逐月生一对一雌一雄的小兔. 现设年初时在兔房里放一对大兔，问一年以后，兔房里有多少对兔子?

我们来分析一个这个问题. 在二月初，最初的那对大兔要生一对小兔，因此，二月初兔房里有一大一小两对兔子. 到三月初，那对大兔继续生一对小兔，这时兔房里已有 $2+1=3$ 对兔子. 到四月初，最初的那对大兔又生一对小兔，而二月初出生的那对小兔已经开始能生一对小兔了. 因此，四月初兔房里有$3+2=5$ 对兔子. 到五月初，最初那对大兔继续生一对，二月初出生的那对也生一对，三月初出生的那对开始能生一对了. 故五月初兔房里总共有 $5+3=8$ 对兔子. 再用这个方法继续讨论下去就有

点说不清了，下面换一种方法讨论．

用 a_n 记第 n 个月初时兔房里兔子的对数，于是，

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_4=5,\ a_5=8.$$

我们发现，这五个数有一个规律，每一个数是前面两个数的和：

$$a_3=a_1+a_2,\ a_4=a_2+a_3,\ a_5=a_3+a_4.$$

这个规律一般对不对呢？我们可以这样想，第 n 个月初时，兔房中的兔子可以分为两部分：一部分是第 $n-1$ 个月初时已经在兔房中的兔子，共有 a_{n-1} 对；另一部分是第 n 个月初新出生的小兔，总共有 a_{n-2} 对，这是因为凡第 $n-2$ 个月初时在兔房中的兔子(不论大小)到第 n 个月初时都能生一对小兔．于是得关系

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}.$$

如果规定 $a_0=1$，依题意又知道 $a_1=1$，那么 $a_2=2=1+1=a_0+a_1$，我们把满足递推关系

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\ n=2,\ 3,\ \cdots \qquad (2)$$

且有初始值 $a_0=1$，$a_1=1$ 的数列叫做菲波那契数列．从(2)以及初始值 $a_0=a_1=1$，不难算出 $a_{13}=377$，即第二年初，兔房里已有 377 对兔子．现在的问题是如何根据上面的递推关系和初始条件求出 a_n 的一般表达式．

一般说来，如果数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ka_{n-k},\ (n=k,k+1,\cdots.) \qquad (3)$$

其中 $c_k\neq0$，就称 $\{a_n\}$ 是一个 k 阶线性递归数列，之所以称为“线性”，是因为每个 a_i 都是以一次的形式出现的．菲波那契数列就是一个二阶递归数列．

k 阶递归数列 $\{a_n\}$ 由递推关系(3)和 k 个初始值 a_0，a_1，$\cdots$，a_{k-1} 所唯一确定．因为如果 a_0，a_1，$\cdots$，a_{k-1} 的值知道了，从(13)便可算出 a_k 的值，再根据 a_1，a_2，$\cdots$，a_k 的值，由(3)便可算出 a_{k+1} 的值，如此等等．

我们的问题是，如何根据递推关系(3)和 a_0，a_1，$\cdots$，a_{k-1} 这

k 个初始值，定出线性递归数列$\{a_n\}$的一般表达式.

先讨论二阶递归数列. 它的递推关系为

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2},\quad n = 2,\ 3,\ \cdots. \tag{4}$$

$c_2 \neq 0$. 称二次方程

$$x^2 = c_1 x + c_2 \tag{5}$$

为(4)的特征方程. 我们分两种情况来讨论：

(一)特征方程有两个不同的根 x_1，x_2，即 $x_1 \neq x_2$.

因为 x_1，x_2 是(5)的两个根，因而由韦达定理

$$x_1 + x_2 = c_1,\quad x_1 x_2 = -c_2,$$

于是(4)可写成

$$a_n = (x_1 + x_2) a_{n-1} - x_1 x_2 a_{n-2},$$

从它可以得到

$$a_n - x_1 a_{n-1} = x_2 (a_{n-1} - x_1 a_{n-2}),$$

$$a_n - x_2 a_{n-1} = x_1 (a_{n-1} - x_2 a_{n-2}).$$

如果记 $p_n = a_n - x_1 a_{n-1}$，$q_n = a_n - x_2 a_{n-1}$， 那么上面两个式子可写为

$$p_n = x_2 p_{n-1},\quad q_n = x_1 q_{n-1}.$$

因而可得

$$p_{n+1} = x_2 p_n,\quad p_n = x_2 p_{n-1},\quad \cdots,\quad p_2 = x_2 p_1.$$

由此即得 $p_{n+1} = x_2^n p_1$，同理 $q_{n+1} = x_1^n q_1$.

即

$$a_{n+1} - x_1 a_n = x_2^n p_1,$$

$$a_{n+1} - x_2 a_n = x_1^n q_1.$$

两式相减得

$$a_n = \frac{x_1^n q_1 - x_2^n p_1}{x_1 - x_2}.$$

如果记

$$\alpha_1 = \frac{q_1}{x_1 - x_2},\quad \alpha_2 = \frac{p_1}{x_1 - x_2},$$

则可得 a_n 的一般表达式为

$$a_n = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n. \tag{6}$$

这里 α_1，α_2 是两个待定的常数，由初始值 a_0，a_1 来确定。

反之，我们也容易证明，对任意常数 α_1，α_2，(6) 满足递推关系(4)．事实上

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} = (\alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n) - c_1(\alpha_1 x_1^{n-1} + \alpha_2 x_2^{n-1}) - c_2(\alpha_1 x_1^{n-2} + \alpha_2 x_2^{n-2})$$

$$= \alpha_1 x_1^{n-2}(x_1^2 - c_1 x_1 - c_2) + \alpha_2 x_2^{n-2}(x_2^2 - c_1 x_2 - c_2) = 0.$$

这里我们已经利用了 x_1，x_2 是特征方程的根的事实．

(二)特征方程有两个相同的根，即 $x_1 = x_2$．

在这种情况下，上面的 $p_n = q_n$．从 $p_n = x_1^{n-1} p_1$ 得

$$a_n - x_1 a_{n-1} = x_1^{n-1} p_1,$$

$$x_1 a_{n-1} - x_1^2 a_{n-2} = x_1^{n-1} p_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_1^{n-2} a_2 - x_1^{n-1} a_1 = x_1^{n-1} p_1,$$

$$x_1^{n-1} a_1 - x_1^n a_0 = x_1^{n-1} p_1.$$

把上面这 n 个式子加起来得

$$a_n = x_1^n a_0 + n x_1^{n-1} p_1. \tag{7}$$

因为 $c_2 \neq 0$，故 $x_1 \neq 0$，记 $\beta_1 = a_0$，$\beta_2 = \dfrac{p_1}{x_1}$，则(7)可写为

$$a_n = (\beta_1 + \beta_2 n) x_1^n. \tag{8}$$

反之，对任意 β_1，β_2，(8)满足递推关系(4)．事实上，因为 x_1 是方程 $x^2 - c_1 x - c_2 = 0$ 的重根，$x_1 = \dfrac{c_1}{2}$，即$2x_1 - c = 0$，$x_1^2 = -c_2$．于是

$$\begin{aligned} & a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} \\ &= (\beta_1 + \beta_2 n) x_1^n - c_1[\beta_1 + \beta_2(n-1)] x_1^{n-1} \\ &\quad - c_2[\beta_1 + \beta_2(n-2)] x_1^{n-2} \\ &= \beta_1 x_1^{n-2}(x_1^2 - c_1 x_1 - c_2) + \beta_2 n x_1^{n-2}(x_1^2 - c_1 x_1 - c_2) \\ &\quad + \beta_2 x_1^{n-1}(c_1 - 2x_1) = 0. \end{aligned}$$

综上所述，我们得到这样的结论：

定理 1 如果 x_1，x_2 是递推关系

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2},\quad n=2,\ 3,\ \cdots$$

的特征方程 $x^2=c_1x+c_2$ 的两个根，那么

(i) 当 $x_1\neq x_2$ 时，a_n 的一般表达式是

$$a_n=\alpha_1x_1^n+\alpha_2x_2^n.$$

(ii) 当 $x_1=x_2$ 时，a_n 的一般表达式是

$$a_n=(\beta_1+\beta_2n)x_1^n,$$

这里 α_1，α_2，β_1，β_2 都是由初始值确定的常数.

由此得到求二阶递归数列一般表达式的方法如下：

第一步：写出递推关系

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}$$

所对应的特征方程

$$x^2=c_1x+c_2.$$

第二步：解特征方程得到两个根 x_1，x_2.

第三步：如果 $x_1\neq x_2$，则 $a_n=\alpha_1x_1^n+\alpha_2x_2^n$；

如果 $x_1=x_2$，则 $a_n=(\beta_1+\beta_2n)x_1^n$.

第四步：根据初始值 a_0，a_1 定出 α_1，α_2 或 β_1，β_2.

现在就根据这个程序，来计算菲波那契数列的一般表达式.

菲波那契数列的递推关系是

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2},\quad n=2,\ 3,\ \cdots.$$

它所对应的特征方程是

$$x^2-x-1=0,$$

它的两个根是

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

所以 $a_n=\alpha_1x_1^n+\alpha_2x_2^n$. 根据初始条件 $a_0=1$，$a_1=1$，得联立方程组

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 1. \end{cases}$$

解这方程组得

$$\alpha_1 = \frac{-x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{5}}, \quad \alpha_2 = \frac{x_2}{x_2 - x_1} = \frac{-x_2}{\sqrt{5}}.$$

最后得非波那契数列的一般表达式为

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x_1^{n+1} - x_2^{n+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], n = 0, 1, 2, \cdots. \quad (9) \end{aligned}$$

在实际计算 a_n 的值时，可把(9)写成

$$a_n + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1},$$

因为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$是一个小于 1 的正数，而 a_n 是个正整数，故得

$$a_n = \begin{cases} \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], & n \text{ 是奇数时；} \\ \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] + 1, & n \text{ 是偶数时.} \end{cases}$$

这里$[x]$是 x 的整数部分.

例 1 用 1，2，3 三个数字来构造 n 位数，但不允许有两个紧挨着的 1 出现在 n 位数中(例如，当 $n=5$ 时，31213 是允许的，11233，31112 都是不允许的)，问能构造多少个这样的 n 位数？

解 设能构造 a_n 个 n 位数. 容易知道 $a_1=3$，$a_2=8$. 当 $n \geqslant 3$ 时，如果 n 位数的第一个数字是 2 或 3，那么这样的 n 位数有 $2a_{n-1}$ 个；如果 n 位数的第一个数字是 1，那么第二个数字只能是 2 或 3，因而这样的 n 位数有 $2a_{n-2}$ 个，于是得递推关系

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \cdots.$$

如果规定 $a_0 = 1$，那么 a_0，a_1，a_2 满足上述关系. 为了求得a_n的一般表达式，先解特征方程 $x^2 = 2x + 2$，

得 $x_1=1+\sqrt{3}$，$x_2=1-\sqrt{3}$.

所以 $a_n=\alpha_1(1+\sqrt{3})^n+\alpha_2(1-\sqrt{3})^n$. 从 $a_0=1$，$a_1=3$ 得

$$\alpha_1+\alpha_2=1，(1+\sqrt{3})\alpha_1+(1-\sqrt{3})\alpha_2=3，$$

解之得 $\alpha_1=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$，$\alpha_2=\dfrac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}$. 故得所求解为

$$a_n=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n+\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n.$$

对于一般 k 阶递推关系

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ka_{n-k}，\ c_k\neq 0，\tag{10}$$

它的特征方程定义为 $x^k=c_1x^{k-1}+c_2x^{k-2}+\cdots+c_k$. (11)

关于 k 阶递归数列 a_n 的一般表达式，我们有下面的

定理 2 如果递推关系(10)所对应的特征方程有 k 个不相同的根 x_1，x_2，$\cdots$，x_k，那么 $a_n=\alpha_1x_1^n+\alpha_2x_2^n+\cdots+\alpha_kx_k^n$. 其中 α_1，α_2，$\cdots$，α_k 是由初始值 a_0，a_1，$\cdots$，a_{k-1} 确定的常数.

定理 3 如果(10)所对应的特征方程(11)有 $r(r<k)$ 个不同的根 x_1，$\cdots$，x_r，它们的重数分别为 m_1，$\cdots$，m_r，这里 $m_1+\cdots+m_r=k$，那么 $a_n=P_1(n)x_1^n+P_2(n)x_2^n+\cdots+P_r(n)x_r^n$. 这里 $P_1(n)$，$\cdots$，$P_r(n)$ 分别是 n 的次数不超过 $m_1-1,\cdots,m_r-1$ 的多项式，可由初始值 a_0，$a_1,\cdots,a_{k-1}$ 确定.（定理证明略.）

例 2 设数列 $\{a_n\}$ 满足关系式

$$a_n=-a_{n-1}+16a_{n-2}-20a_{n-3}，\ n=3，4，5，\cdots.$$

已知初始值 $a_0=0$，$a_1=1$，$a_2=-1$，求 a_n 的一般表达式.

解 上述递推关系所对应的特征方程是 $x^3=-x^2+16x-20$. 不难算出它有两个不相同的根 $x_1=2$，$x_2=-5$，其中 $x_1=2$ 是二重根. 根据定理 3 得 $a_n=(\alpha_1n+\alpha_2)2^n+\alpha_3(-5)^n$.

由初始条件得
$$\begin{cases}\alpha_2+\alpha_3=0，\\ 2(\alpha_1+\alpha_2)-5\alpha_3=1，\\ 4(2\alpha_1+\alpha_2)+25\alpha_3=-1.\end{cases}$$

解这方程组得$\alpha_1=\frac{1}{7}$，$\alpha_2=\frac{5}{49}$，$\alpha_3=-\frac{5}{49}$，故得

$$a_n=\left(\frac{n}{7}+\frac{5}{49}\right)2^n+\frac{(-1)^{n+1}}{49}5^{n+1}.$$

思考题

1. 什么叫k阶线性递归数列？
2. 要确定一个k阶线性递归数列，除了要知道它所满足的递推关系外，还需要有什么条件？
3. 试述求k阶线性递归数列一般表达式的步骤.

习题 36

1. 已知$\{a_n\}$满足$a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$，且$a_0=1$，$a_1=-2$，求a_n的一般表达式.
2. 已知$\{a_n\}$满足$a_n=a_{n-1}+9a_{n-2}-9a_{n-3}$，且$a_0=0$，$a_1=1$，$a_2=2$，求$a_n$的一般表达式.
3. 已知$\{a_n\}$满足$a_n=3a_{n-2}-2a_{n-3}$，且$a_0=1$，$a_1=0$，$a_2=0$，求a_n的一般表达式.
4. 有排成一行的n个方格，今用红、白两色给这n个方格染色，每一方格只涂一种颜色. 如果要求相邻两格不能都涂红色，问有几种不同的染法？
5. 有甲、乙、丙三个小圆桌，甲桌上有n个大小不同的盘子依大小次序迭在一起，最大的在底下，最小的在顶上面. 要把这堆盘子按甲桌上的次序移到另一桌上，但规定每次只能移动最上面的一个盘子，而且不允许把大盘子放在小盘子上. 问至少要移动多少次，才能把这堆盘子移到另一桌上？这里假定每个圆桌的大小只能放一个最大的盘子.
6. 证明

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_{n-k}^{k}r^k=\frac{1}{2^{n+1}\sqrt{1+4r}}\left[(1+\sqrt{1+4r})^{n+1}-(1-\sqrt{1+4r})^{n+1}\right].$$

第37讲　递归数列(二)

史济怀

第36讲讨论的是最简单的递归数列，它满足的递推关系

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ka_{n-k}$$

称为常系数线性递推关系．它是最简单的一种递推关系，但却是最基本的．第36讲已完全解决了求这种递归数列一般表达式的问题．这一讲将在此基础上讨论一些更复杂的问题．

例1　设$\{a_n\}$满足$a_0=2$，$a_n=\dfrac{2a_{n-1}+6}{a_{n-1}+1}\ (n\geqslant 1)$，　(1)

求a_n．(1987年中国数学奥林匹克集训队习题．)

解　递推关系(1)不再是线性关系，而是分式线性关系．为了求出a_n的一般表达式，把(1)改写为

$$a_n=\frac{2a_{n-1}+2+4}{a_{n-1}+1}=2+\frac{4}{a_{n-1}+1},$$

或

$$a_n+1=3+\frac{4}{a_{n-1}+1}. \tag{2}$$

令$b_n=a_n+1$，则(2)变为$b_n=3+\dfrac{4}{b_{n-1}}$，这样问题便转化为求b_n，它满足

$$b_0=3,\ b_n=3+\frac{4}{b_{n-1}},\ n=1,2,\cdots. \tag{3}$$

设$b_n=\dfrac{p_n}{q_n}$，代入上式得

$$\frac{p_n}{q_n}=3+\frac{4}{\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}=3+\frac{4q_{n-1}}{p_{n-1}}=\frac{3p_{n-1}+4q_{n-1}}{p_{n-1}}.$$

由此即得

$$p_n=3p_{n-1}+4q_{n-1},\ q_n=p_{n-1}.$$

把 $q_n=p_{n-1}$ 代入前面的公式，即得 p_n 满足的关系式：

$$p_n=3p_{n-1}+4p_{n-2},\quad n=2,\ 3,\ \cdots. \tag{4}$$

它正是第36讲讲过的那种常系数线性递推关系．因为$\frac{p_0}{q_0}=b_0=3$，所以得 $p_0=3$，$q_0=1$．另外从(3)得 $b_1+3+\frac{4}{b_0}=\frac{13}{3}=\frac{p_1}{q_1}$，所以 $p_1=13$，$q_1=3$．于是利用第36讲讲过的方法，从(4)和 $p_0=3$，$p_1=13$ 便可解得

$$p_n=\frac{1}{5}((-1)^{n+1}+4^{n+2}). \tag{5}$$

由此得
$$q_n=p_{n-1}=\frac{1}{5}((-1)^n+4^{n+1}),$$
因而
$$b_n=\frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^{n+1}+4^{n+2}}{(-1)^n+4^{n+1}},$$

所要求的 $a_n=b_{n-1}=\dfrac{3\cdot4^{n+1}+2(-1)^{n+1}}{4^{n+1}+(-1)^n}$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$.

这就是 a_n 的一般表达式.

解上面这个题的过程是这样的：先把求 a_n 的问题转化为求 b_n，再把求 b_n 的问题转化为求 p_n 和 q_n，而 p_n 满足一个二阶常系数线性递推关系，利用第 36 讲的方法求得 p_n，由 $q_n=p_{n-1}$ 得 q_n，从而求得 a_n.

例 2 数列$\{a_n\}$定义为

$$a_0=2,\quad a_1=\frac{5}{2},\quad a_{n+1}=a_n(a_{n-1}^2-2)-a_1,\quad n=1,2,\cdots. \tag{6}$$

试证
$$[a_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots.$$

这里$[a_n]$表示 a_n 的整数部分.（第18届国际数学竞赛试题，1976年。）

证 这题乍一看来，简直无法下手．我们试着来求满足(6)的下列形式的解
$$a_n=2^{b_n}+2^{-b_n},\quad n=1,\ 2,\ \cdots. \tag{7}$$

即适当取 b_n，使由(7)表示的 a_n 满足(6)，为此把(7)代入(6)得

$$2^{b_{n+1}}+2^{-b_{n+1}}=(2^{b_n}+2^{-b_n})((2^{b_{n-1}}+2^{-b_{n-1}})^2-2)-\frac{5}{2}$$

$$=(2^{b_n}+2^{-b_n})(2^{2b_{n-1}}+2^{-2b_{n-1}})-\frac{5}{2}$$

$$=[2^{b_n+2b_{n-1}}+2^{-(b_n+2b_{n-1})}]$$

$$+[2^{b_n-2b_{n-1}}+2^{-(b_n-2b_{n-1})}]-\left(2+\frac{1}{2}\right). \tag{8}$$

如果选取 b_n，使之满足 $b_{n+1}=b_n+2b_{n-1}$， (9)

这时 $b_n=b_{n-1}+2b_{n-2}$，或

$$b_n-2b_{n-1}=2b_{n-2}-b_{n-1}=-(b_{n-1}-2b_{n-2})$$

$$=(-1)^2(b_{n-2}-2b_{n-3})=\cdots=(-1)^{n-1}(b_1-2b_0). \tag{10}$$

从(7)得 $2^{b_0}+2^{-b_0}=a^0=2$，即$\left(2^{\frac{b_0}{2}}-2^{-\frac{b_0}{2}}\right)^2=0$，即$2^{\frac{b_0}{2}}=2^{-\frac{b_0}{2}}$，

$2^{b_0}=1$，所以 $b_0=0$．另外，$2^{b_1}+2^{-b_1}=a_1=\frac{5}{2}$，所以 $b_1=1$．于是从(10)得 $b_n-2b_{n-1}=(-1)^{n-1}$．

因而 $2^{b_n-2b_{n-1}}+2^{-(b_n-2b_{n-1})}=2^{(-1)^{n-1}}+2^{(-1)^n}=2+\frac{1}{2}$.

由此得知，当(9)成立时，(8)也成立．这样，问题就变成求 b_n，它满足(9)和初始值$b_0=0$，$b_1=1$．由第36讲讲过的方法立刻算得

$$b_n=\frac{1}{3}(2^n-(-1)^n).$$

这样就得到满足(6)的 a_n 的一般表达式

$$a_n=2^{b_n}+2^{-b_n},\qquad b_n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}. \tag{11}$$

由于 $2^n=(3-1)^n=3^n-C_n^1 3^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}3+(-1)^n$

$$=3q+(-1)^n,$$

这里 q 是正整数，所以 $2^n-(-1)^n=3q$，因而 $b_n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$

是正整数．另外 $0<2^{-b_n}<1$，故从(11)即得$[a_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$.

这道题的解法和例 1 不一样，但最终还是归结到求一个满足常系数线性递推关系的数列。

例 3 设正数列$\{a_n\}$满足

$$a_1=1,\ a_2=10,\ a_n^2a_{n-2}=10a_{n-1}^3,\ n=3,\ 4,\ \cdots. \tag{12}$$

求 a_n 的表达式。(1987 年中国数学奥林匹克集训队习题.)

解 这是非线性的递推关系. 把(12)改写为

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^2=10\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}. \tag{13}$$

令$b_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$,则(13)又可写为 $b_n^2=10b_n$, $b_n=(10b_{n-1})^{\frac{1}{2}}$. (14)

由这递推关系可得

$$\begin{aligned}
b_n&=(10\ b_{n-1})^{\frac{1}{2}}=10^{\frac{1}{2}}(10b_{n-2})^{\frac{1}{4}}=10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}(b_{n-2})^{\frac{1}{4}}\\
&=10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}(10\ b_{n-3})^{\frac{1}{8}}=10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}(b_{n-3})^{\frac{1}{8}}=\cdots\\
&=10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}}(b_2)^{\frac{1}{2^{n-2}}}\\
&=10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}}\\
&=10^{1-\frac{1}{2^{n-2}}}\cdot10^{\frac{1}{2^{n-2}}}=10,
\end{aligned}$$

由此得 $a_n=10a_{n-1}$, 即 a_n 是一个等比数列. 于是, $a_n=10a_{n-1}=10^2a_{n-2}=\cdots=10^{n-1}a_1=10^{n-1}$, 这就是 a_n 的一般表达式.

设 f 是定义在非负整数集上的函数，那么数列$\{a_n\}$也可表示为$\{f(n)\}$，这样的记号在讨论某些问题时更方便.

例 4 设$f(n)$是定义在自然数集上且取自然数值的严格递增的函数，如果 $f(2)=2$，且当 m,n 互素时，$f(mn)=f(m)f(n)$.

$$\tag{15}$$

证明，对一切正整数 n 有 $f(n)=n$. (16)

(第 24 届美国普特南数学竞赛试题，1963年.)

证 先来证明 $f(3)=3$. 因为 f 是严格递增的，所以 $f(3)$

$>f(2)=2$. 如果能证明$f(3)<4$，那么就必定有$f(3)=3$. 利用条件(15)得 $f(3)f(7)=f(21)<f(22)=f(2)f(11)=2f(11)$

$$<2f(14)=2f(2)f(7)=4f(7).$$

由此即得$f(3)<4$，因而$f(3)=3$. 现若(16)不成立，设使$f(n)\neq n$的最小正整数为n_0，因为$f(1)=1$(这可从$f(2)=2$的假定导出)，$f(2)=2$，$f(3)=3$，所以$n_0\geqslant 4$. 也就是说，我们假定

$f(1)=1$，$f(2)=2$，$f(3)=3$，…，$f(n_0-1)=n_0-1$，

$f(n_0)\neq n_0$.

因为$f(n_0)>f(n_0-1)=n_0-1$，但$f(n_0)\neq n_0$，故必有$f(n_0)>n_0$. 又因为f是严格递增的，$f(n_0+1)>f(n_0)>n_0$，所以$f(n_0+1)>n_0+1$. 同理$f(n_0+2)>f(n_0+1)>n_0+1$，因而$f(n_0+2)>n_0+2$. 一般来说，当$n\geqslant n_0$时有

$$f(n)>n. \tag{17}$$

现设n_0为奇数，则2和n_0-2互素，由(15)得

$$f(2(n_0-2))=f(2)f(n_0-2)=2f(n_0-2)=2(n_0-2). \tag{18}$$

因为$n_0\geqslant 4$，$2(n_0-2)\geqslant n_0$，从(17)得$f(2(n_0-2))>2(n_0-2)$，这与(18)相矛盾.

如果n_0为偶数，则2和n_0-1互素，于是

$$f(2(n_0-1))=f(2)f(n_0-1)=2f(n_0-1)=2(n_0-1). \tag{19}$$

显然$2(n_0-1)>n_0$，从(17)应有$f(2(n_0-1))>2(n_0-1)$，这和(19)矛盾，因而(16)成立.

这里的递推方式和前面几个题很不相同，它建立在互素的自然数上，因而处理的方法也和前面的不同.

例5 设f,g是定义在正整数集Z^+上并取正整数值的严格递增函数，如果它们满足：

(i) $f(Z^+)\cup g(Z^+)=Z^+$,

(ii) $f(Z^+)\cap g(Z^+)=\phi$,

(iii) $g(n)=f(f(n))+1$,

求 $f(240)$．（第 20 届国际数学竞赛试题，1979 年．）

在解这题前，先证明一个一般的结果．

命题：设 α，β 是正的无理数，且满足 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$，那么数列

$$[\alpha],\ [2\alpha],\ \cdots,\ [n\alpha],\ \cdots, \tag{20}$$

$$[\beta],\ [2\beta],\ \cdots,\ [n\beta],\ \cdots, \tag{21}$$

合起来恰好不重复地构成自然数集．

首先证明 $[n\alpha]$，$[n\beta]$ 都是严格递增的数列．事实上，因为 $\alpha>1$，$\beta>1$，所以

$$[(n+1)\alpha]=[n\alpha+\alpha]\geqslant[n\alpha]+[\alpha]\geqslant[n\alpha]+1>[n\alpha].$$

同理可以证明 $[n\beta]$ 也是严格递增的．于是(20)，(21) 两个数列本身没有重复．如果(20)与(21)中的数有重复，即存在自然数 n，m，使得 $[\alpha n]=[\beta m]=k$，这时 $\alpha n=k+\theta$，$\beta m=k+\varphi$，这里 $0<\theta$，$\varphi<1$，于是

$$n+m=k\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{\theta}{\alpha}+\frac{\varphi}{\beta}=k+\frac{\theta}{\alpha}+\frac{\varphi}{\beta}.$$

但 $0<\frac{\theta}{\alpha}+\frac{\varphi}{\beta}<\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$，这说明 $n+m$ 不是整数，这当然不可能．这就证明了(20)，(21)合起来构成了不重复的自然数列．今再证明任何自然数必在(20)或(21)中出现．设 k 是任意自然数，记 $n=\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]$．如果 $n>\frac{k}{2}$，即 $k<n\alpha$，那么 $k<n\alpha<[(k+1)\alpha]/\alpha=k+1$，即 $k=[n\alpha]$，这说明 k 出现在(20)中．如果 $n<\frac{k}{\alpha}$，则

$$\beta(k-n)>\beta k-\frac{\beta}{\alpha}k=\beta k\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)=\beta k\frac{1}{\beta}=k,$$

$$\beta(k-n)<\beta k-\beta\left(\frac{k+1}{\alpha}-1\right)$$

$$= \beta(k+1) - \frac{\beta}{\alpha}(k+1)$$

$$= (k+1)\beta\left(1 - \frac{1}{2}\right) = k+1,$$

所以$[\beta(k-n)] = k$，这说明 k 出现在(21)中．这就证明了(20)和(21)合起来构成了不重复的自然数系．

现在回到例 5．

解　对于满足$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$的无理数$\alpha, \beta$，如果令$f(n) = [n\alpha]$，$g(n) = [n\beta]$，那么 f，g 满足题目中的条件(i)，(ii)．现在选取

$$\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\quad \beta = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}),$$

容易证明$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$．我们证明这样的 f，g 也满足题中的条件(iii)，即要证

$$[n\beta] = [[n\alpha]\alpha] + 1. \tag{22}$$

因为 $\alpha > 1$，$\alpha^2 = \beta$，所以$[n\alpha]\alpha < n\alpha^2 = n\beta$，即$[[n\alpha]\alpha] \leqslant [n\beta]$，但由上面所证的命题，等号不能成立，因而$[[n\alpha]\alpha] < [n\beta]$，即

$$[n\beta] \geqslant [[n\alpha]\alpha] + 1. \tag{23}$$

另一方面，因为 $\beta = 1+\alpha$，$[n\beta] = [n(\alpha+1)] = [n\alpha + n] = [n\alpha] + n$，又因 $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$，所以

$$[n\alpha]\alpha = [n\alpha]\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= [n\alpha] + \frac{1}{\alpha}[n\alpha] > [n\alpha] + \frac{1}{\alpha}(n\alpha - 1)$$

$$= [n\alpha] + n - \frac{1}{\alpha} = [n\beta] - \frac{1}{\alpha} > [n\beta] - 1,$$

即

$$[n\beta] \leqslant [[n\alpha]\alpha] + 1. \tag{24}$$

综合(23)和(24)，即知(22)成立．

于是 $f(n)=[n\alpha]=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right]$和 $g(n)=[n\beta]$ $=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]$就是题目中要求的 f 和 g，现在容易算出 $f(240)=388$.

思考题

1. 总结本讲中五个例子解题方法的特点.
2. 能否从例 1 总结出求满足

$$a_0=\eta,\quad a_n=\frac{\alpha a_{n-1}+\beta}{\gamma a_{n-1}+\delta},\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

的数列 a_n 的一般表达式的方法？其中α，β，γ，δ，η 是已知数

习 题 37

1. 设$\{a_n\}$满足 $a_0=10$，$a_n=\frac{10a_{n-1}-77}{a_{n-1}-8}$，$n=1,\ 2,\ \cdots$，求 a_n.
2. 设$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$4a_na_{n+1}=(a_n+a_{n+1}-1)^2$，$a_{n+1}>a_n$，求$a_n$.
3. 设$\{a_n\}$满足 $a_1=4$，$a_2=10$，$a_n^2\sqrt{a_{n-2}}=5a_{n-1}^2$，求$a_n$.
4. 设$\{a_n\}$满足

$$a_0=2,\ a_1=\frac{50}{7},\ a_{n+1}=a_n(a_{n-1}^2-2)-a_1,\ n=1,\ 2,\ \cdots,$$

求 a_n.

5. 设 $f(n)$和 $g(n)$是由下列三个条件确定的自然数序列：
   (i) $f(1)=1$，
   (ii) $g(n)=na-1-f(n)$，a 是一个大于4 的整数，
   (iii) $f(n+1)$是与 $2n$ 个数 $f(1), f(2), \cdots, f(n), g(1), g(2), \cdots, g(n)$不同的最小的自然数.

   证明存在常数 p，q，使得 $f(n)=[pn]$，$g(n)=[qn]$.

第38讲 整 除 性

谢盛刚

一、带余除法

我们知道，整数相加、相减或相乘后都得到整数，而两个整数的商就不一定是整数了．在算术中，大家都学过用一个正整数去除一个整数得到一个商数和一个余数的带余除法．例如，179除以 34 商 5 余 9，写成式子就是 $179=34\times5+9$．

用一般公式来表示，就是

定理 1 设 a，b 是给定的正整数，$b>0$，则有唯一的 q 和 r，满足

$$a=bq+r,\ 0\leqslant r<b. \tag{1}$$

证 取 $q=\left[\frac{a}{b}\right]$，$r=a-bq$，即得(1)．又如果还有 q'，r' 满足(1)，则得 $b(q-q')=r'-r$，即有 $b|q-q'|=|r'-r|$．因为 $b>0$ 及 $|r'-r|<b$，只有 $r'-r=q-q'=0$，即 $r'=r$，$q'=q$．因此唯一性成立．

在(1)中，q 称为 a 除以 b 的(不完全)商，r 称为 a 除以 b 的余数．当 $r=0$ 时，$a=bq$，即 a 为 b 与一个整数的乘积，称为 b 整除 a，记成 $b|a$．$b|a$ 也称 a 是 b 的倍数，b 是 a 的约数．

用 n 作除数，其余数 r 有 n 种可能的情况，即 $r=0$，1，… 或 $n-1$．特别地，用 2 作除数，余数为 0 或1，前者被除数是偶数，后者被除数为奇数．

例 1 若 n 是奇数，则 $8|n^2-1$．

证 设 $n=2k+1$，则 $n^2-1=(2k+1)^2-1=8\frac{k(k+1)}{2}$，

由于k或$k+1$为偶数，因此$k(k+1)$为偶数，即$\frac{k(k+1)}{2}$为整数．故$8|n^2-1$．

例 2 n个连续整数中恰有一个是n的倍数．

证 设这n个整数是m，$m+1$，…，$m+n-1$，又令$m=nq+t(0\leqslant t\leqslant n-1)$．当$t=0$时，显然$m$就是$n$的倍数．如果$1\leqslant t\leqslant n-1$，则$m+n-t$是$n$的倍数，并且是$n$个数中的一个．由于$n$的两个不同的倍数之差至少是$n$，而$n$个连续整数中任意两个之差至多是$n-1$，所以其中不可能有两个$n$的倍数．

二、唯一分解定理，最大公约数

如果一个大于1的整数可以写成两个大于1的整数的乘积，就称为合数，否则称为素数．1既不是素数，也不是合数．

定理 2 任何大于1的整数都可以表示成素数的乘积，若不计这些素数因子的次序，则这种表示法是唯一的．

定理2是初等数论中最重要的定理，称为正整数的唯一因子分解定理或算术基本定理．

把定理2中所说的素因子分解式中的素数按其大小次序排列，并把相同的乘在一起，就得到唯一分解定理的另一种说法：如果$n\geqslant 2$，则n可以唯一地表示成

$$n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}, \tag{2}$$

其中$p_1<\cdots<p_s$都是素数，α_1，…，α_s都是正整数．(2)通常称为n的标准因子分解式．有时为了方便，还可以在标准因子分解式中添某些素数的零次幂．

由定理2立刻可以推出

定理 3 设p是素数，$p|ab$，则$p|a$或$p|b$．

例 3 若$\sqrt[n]{a}$和$\sqrt[n]{b}$都是整数，并且$\sqrt[n]{a}\,|\,\sqrt[n]{b}$，则$a|b$．

证 设$\sqrt[n]{a}=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$，$\sqrt[n]{b}=p_1^{\beta_1}\cdots p_s^{\beta_s}(\alpha_i\geqslant 0,\ \beta_i\geqslant 0)$是$\sqrt[n]{a}$和$\sqrt[n]{b}$的标准因子分解式．由于$\sqrt[n]{a}\,|\,\sqrt[n]{b}$，所以$\alpha_i\leqslant\beta_i(i=1,$

$\cdots, s$). 又 $a=p_1^{n\alpha_1}\cdots p_s^{n\alpha_s}$, $b=p_1^{n\beta_1}\cdots p_s^{n\beta_s}$. 由于 $\alpha_i n\leqslant\beta_i n(i=1,\cdots,s)$, 所以 $a|b$.

由(2)可知，$n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 的正约数 d 可以写成 $d=p_1^{\beta_1}\cdots p_s^{\beta_s}$ $(0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i)$. 由于 β_i 有 α_i+1 种不同的取法，所以 n 的正约数个数 $d(n)=(1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_s)$.

给定两个整数 a, b, 它们至少有一个公共的约数1. 如果 a 和 b 只有这一个正的公约数，就称 a 与 b 互素. a 和 b 的公约数中必有一个最大的，称这数为 a 与 b 的最大公约数，记成 (a, b). 显然，a 与 b 互素就是 $(a, b)=1$.

如果 $a=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$, $b=p_1^{\beta_1}\cdots p_s^{\beta_s}$ 是 a 和 b 的标准分解式，显然 $(a, b)=p_1^{\gamma_1}\cdots p_s^{\gamma_s}$, 其中 $\gamma_i=\min(\alpha_i, \beta_i)$. 容易看到 a, b 的公约数必是 (a, b) 的约数.

a 和 b 的公倍数中最小的那个，记成 $[a, b]$. 显然有 $[a, b]=p_1^{\mu_1}\cdots p_s^{\mu_s}$, 其中 $\mu_i=\max(\alpha_i, \beta_i)$. 容易证明 a 和 b 的公倍数都是 $[a, b]$ 的倍数.

由上述可知，$(a, b)[a, b]=ab$.

例 4 $\left(\dfrac{a}{(a,b)}, \dfrac{b}{(a,b)}\right)=1$.

证 若 $\left(\dfrac{a}{(a,b)}, \dfrac{b}{(a,b)}\right)=d$, 则有 $d\left|\dfrac{a}{(a,b)}\right.$, 故 $d(a, b)|a$. 类似地 $d(a,b)|b$. 因此 $d(a,b)$ 也是 a 和 b 的公约数. 由于 (a, b) 是最大公约数，所以必有 $d=1$.

例 5 若 $(a,b)=1$, 则 $[a,b]=ab$.

证 由 $ab=(a,b)[a,b]$ 即得.

由唯一分解定理很容易证明下面的结论.

例 6 若 $(a,c)=1$, $a|b$, $c|b$, 则 $ac|b$.

例 7 若 $(a,b)=(c,d)=1$, $a,b,c,d>0$, 并且 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, 则

$a=c$，$b=d$. 这就是既约分数的唯一性.

三、辗转相除法

用分解因式的方法求最大公约数说起来容易，但真正实行起来并不简单. 下面我们介绍另一种求最大公约数的方法——辗转相除法 .

定理 4 设 a，b 不同时为零，则

1° $(a,b)=(a,b-ax)=(a-bx,b)$ 对任何 x 成立.

2° 存在 x,y，使 $ax+by=(a,b)$.

3° 若 $(a,b)=1$，$a|bc$，则 $a|c$.

证 1° 只需证明第一个等式. 设 d 是 a 和 b 的公约数，则 d 也是 $b-ax$ 的约数. 反之，如果 d 是 a 和 $b-ax$ 的公约数，则也是 b 的约数. 所以，a 与 b 的公约数集和 a 与 $b-ax$ 的公约数集相同，因而它们的最大数也相等.

2° 不失一般性，可以设 $a\geqslant b\geqslant 0$，对 b 即 a 和 b 中较小的那个数用归纳法.

$b=0$ 时，$a\geqslant 1$，这时 $a|b$，故 $(a,b)=a$. 这时取 $x=y=1$ 即可.

设 $b\geqslant 1$，令 $a=bq+r$，$0\leqslant r<b$. 于是由 1° 有 $(a,b)=(a-bq,b)=(b,r)$. 现在 $b>r\geqslant 0$，由归纳法假设，存在 x_1，y_1 使 $(a,b)=(b,r)=bx_1+ry_1=bx_1+(a-bq)y_1=ay_1+b(x_1-qy_1)$. 令 $x=y_1$，$y=x_1-qy_1$，即得证.

3° 由 2°，存在 x,y 使 $ax+by=1$，故 $acx+bcy=c$. 由于 $a|bc$，故 $a|acx+bcy=c$.

定理 4 的 1° 和 2° 不但给出了求 (a,b) 的方法，并且给出了求出一组 x,y 使 $ax+by=(a,b)$ 的方法.

例 8 求 $(327,180)$.

解 $(327,180)=(327-180,180)=(147,180)$

$=(147,180-147)=(147,33)=(147-4\times 33,33)$

$$=(15,33)=(15,33-2\times 15)=(15,3)=3.$$

又有 $3=33-2\times 15=33-2\times(147-4\times 33)$

$$=9\times 33-2\times 147=9\times(180-147)-2\times 147$$
$$=9\times 180-11\times 147=9\times 180-11\times(327-180)$$
$$=20\times 180-11\times 327.$$

定理 4 的 2° 称为 Be'zout 定理，在初等数论中有广泛的应用.

若 $ax_0+by_0=c$，则 $x=x_0+bt$，$y=y_0-at$ 也满足 $ax+by=c$. 因此满足等式

$$ax+by=(a,b) \tag{3}$$

的 x,y 有无穷多组.

关于多个整数的最大公约数有下面两个定理.

定理 5 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)=((a_1,\cdots,a_{n-1}),a_n)$.

证 设素数 p 在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的因子分解式中各有 α_1，α_2，$\cdots,\alpha_n$ 次，则 p 在 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 中的次数为 $\min(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，在 $(a_1,\cdots,a_{n-1})$ 中的次数为 $\min(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})$，故 p 在 $((a_1,\cdots,a_{n-1}),a_n)$ 中的次数为 $\min(\min(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}),\alpha_n)=\min(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，因为任何素数在 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $((a_1,\cdots,a_{n-1}),a_n)$ 中的次数相同，它们必相等.

定理 6 设 $a_1,\cdots,a_n$ 不全为零，则必有整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

证 对 n 用数学归纳法. 当 $n=2$ 时显然.

由定理 5，$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=((a_1,\cdots,a_{n-1}),a_n)$，故存在 s,t 使

$$s(a_1,\cdots,a_{n-1})+ta_n=(a_1,a_2,\cdots,a_n).$$

由归纳假设，存在 $u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}$，使

$$u_1a_1+u_2a_2+\cdots+u_{n-1}a_{n-1}=(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}).$$

取 $x_1=su_1$，$x_2=su_2,\cdots,x_{n-1}=su_{n-1}$，$x_n=t$，即得定理.

定理 4 和定理 6 揭示了一个重要的事实：若干个非零整数的任一个公约数，都是它们的最大公约数的约数．

四、整值多项式

当变数取整数时整系数多项式的值也是整数，但有些不是整系数的多项式在变数为整数时也总能取整数值，例如 $f(n)=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$ 就是．当变数为整数时取值也是整数的多项式称为整值多项式．什么样的多项式是整值多项式呢？这一节就讨论这个问题．

最基本的一类整值多项式是

$$\binom{x}{0}=1,\binom{x}{r}=\frac{x(x-1)\cdots(x-r+1)}{r!},\quad (r\geqslant 1).$$

当 $0\leqslant x\leqslant r-1$ 时 $\binom{x}{r}=0$，$x\geqslant r$ 时 $\binom{x}{r}=C_x^r$，$x<0$ 时 $\binom{x}{r}=(-1)^r\frac{-x(-x+1)\cdots(-x+r-1)}{r!}=(-1)^rC_{r-x-1}^r$，都是整数．注意：这里 $\binom{x}{r}$ 不表示组合数．

定理 7 多项式 $P(x)$ 是整值多项式的充分必要条件是存在整数 $a_k,a_{k-1},\cdots,a_1,a_0$，使

$$P(x)=a_k\binom{x}{k}+a_{k-1}\binom{x}{k-1}+\cdots+a_1\binom{x}{1}+a_0\binom{x}{0}.\qquad (4)$$

证 条件显然是充分的．

下面证明条件的必要性．设 $P(x)$ 是 k 次整值多项式．对 k 用归纳法．

当 $k=0$ 时显然．

设 $P(x)$ 是 $k+1$ 次整值多项式．

我们知道任一个 n 次多项式 $Q(x)$ 都可以唯一地表示成

$$Q(x)=\alpha_n\binom{x}{n}+\alpha_{n-1}\binom{x}{n-1}+\cdots+\alpha_1\binom{x}{1}+\alpha_0,(\alpha_i\in R).\ (5)$$

因为只要令$x=0,1,\cdots,n$，通过(5)就可以逐个确定出$\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$的值.

我们先把$P(x)$表成(5)，再证明系数都是整数就行了. 设

$$P(x)=a_{k+1}\binom{x}{k+1}+a_k\binom{x}{k}+\cdots+a_1\binom{x}{1}+a_0, a_i\in R. \quad (6)$$

显然$P(x+1)$也是整值多项式，故$Q(x)=P(x+1)-P(x)$是整值多项式. 由于当$r\geqslant1$时有

$$\begin{aligned}\binom{x+1}{r}-\binom{x}{r}&=\frac{(x+1)x\cdots(x-r+2)}{r!}\\&\quad-\frac{x(x-1)\cdots(x-r+1)}{r!}\\&=\frac{x(x-1)\cdots(x-r+2)}{r!}(x+1-x+r-1)\\&=\binom{x}{r-1},\end{aligned}$$

所以$Q(x)=a_{k+1}\binom{x}{k}+a_k\binom{x}{k-1}+\cdots+a_2\binom{x}{1}+a_1\binom{x}{0}$.

因为$Q(x)$是k次整值多项式，由归纳法假设以及(5)式的唯一性可知，$a_1,\cdots,a_{k+1}$都是整数. 又$a_0=P(0)$也是整数. 即(6)右边的系数都是整数.

把$P(x)$展开成(6)来判断$P(x)$是否整值多项式往往要经过比较繁的计算，下面给出另一个判断多项式$P(x)$是否整值多项式的充分必要条件.

定理8 k次多项式$P(x)$为整值多项式的充分必要条件是在某$k+1$个连续整数上，多项式的值是整数.

证 条件显然是必要的.

对k用归纳法证明条件的充分性.

$k=0$时显然.

设$P(x)$是$k+1$次多项式，当$x=n,n+1,\cdots,n+k+1$时$P(x)$取整数值. 令

$$P(x)=a_{k+1}\binom{x}{k+1}+a_k\binom{x}{k}+\cdots+a_1\binom{x}{1}+a_0,(a_i\in R).(7)$$

显然 $P(x+1)$ 在 $x=n,n+1,\cdots,n+k$ 时取整值，所以 k 次多项式

$$Q(x)=P(x+1)-P(x)$$
$$=a_{k+1}\binom{x}{k}+a_{k-1}\binom{x}{k}+\cdots+a_2\binom{x}{1}+a_1$$

在 $k+1$ 个连续整数 $x=n$，$n+1$，$\cdots$，$n+k$ 上取整数值．因而 $Q(x)$ 是整值多项式．由定理 5 可知 $a_{k+1},\cdots,a_1$ 都是整数．再由(7)知道

$$a_0=P(n)-a_{k+1}\binom{n}{k+1}-a_k\binom{n}{k}-\cdots-a_1\binom{n}{1}$$

也是整数．因而 $P(x)$ 是整值多项式．

习　题　38

1．设 p 为素数，$1\leqslant k\leqslant p-1$．则 $p\mid c_p^k$．

2．若 n 是大于 9 的奇合数，则 $n^2\mid(n-1)!$．

3．求证：$(2^m-1,\ 2^n-1)=2^{(m,n)}-1$．

4．若整数 a 的 n 次根不是整数，则它必是无理数．

5．设 p 为素数，则在 $n!$ 标准因子分解式中 p 的方次为 $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots$．

6．设 $b>0$，则有 r，q 使 $a=bq+r$，$|r|\leqslant\frac{b}{2}$．当 $|r|\neq\frac{b}{2}$ 时，这种表示法还是唯一的．

7．设 n 是一个奇合数，则 n 个连续正整数的积必是它们的和的倍数．

8．正整数 a 与 b 使得 $ab+1$ 整除 a^2+b^2．求证：$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ 是正整数的平方．(29届IMO，第 6 题)

9．设 n 为正整数，求：$M=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n+2^{k-1}}{2^k}\right]+\cdots$．

第39讲　同　余

谢盛刚

一、同余的概念和性质

在我们安排学习和休息的时候，并不去注意这一天是今年的第几天，而只考虑这一天是星期几．这无疑是很方便的．因为只要把一周的七天怎么安排定下来，就等于把相当长一段时间里每天的安排都定下来了，这种思考方法就包含着同余的概念．在数学中常遇到这样一类问题，它的解答只与一些数字被某个整数 n除后的余数有关，就是说余数相同就有同样的性质．这样就不必去考虑本来那个可能很复杂的数，而代之以一个很简单的数．

定义 1　设 $n>0$．如果 a 和 b 被 n 除后的余数相等，就称 a 与 b 关于模 n 同余．或简记成 $a\equiv b(\bmod n)$．

由定义和整除的性质，容易证明同余式的下述基本性质：

性质 1°　$a\equiv a(n)$．

性质 2°　$a\equiv b(n)$，则 $b\equiv a(n)$．

性质 3°　若 $a\equiv b(n)$，$b\equiv c(n)$，则 $a\equiv c(n)$．

性质 4°　$a\equiv b(n)$的充分必要条件是 $n|a-b$．即有 $a=b+nq$．特别地，$a\equiv 0(n)$即 $n|a$．

性质 5°　若 $a\equiv b(n)$，$c\equiv d(n)$，则

$$a\pm c\equiv b\pm d(n),\ ac\equiv bd(n).$$

性质 5° 的第二个同余式的证明由 $ac-bd=(a-b)c+b(c-b)$即得，而由第一个同余式可以推知同余式一边的一项可以变号后移到另一边去．

性质 6°　若 $m|n$，$a\equiv b(n)$，则 $a\equiv b(m)$．

性质 7°　若 d 是 a,b,n 的公约数，又有 $a\equiv b(n)$，则

$$\frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \left(\frac{n}{d}\right).$$

性质 8° 若 $a \equiv b(n)$，则 $(a,n)=(b,n)$．因为由性质 4° 可知 $a=b+nq$，故 $(a,n)=(a-nq,n)=(b,n)$．特别地，如果 a 与 n 互素，则 b 也与 n 互素．

根据对模 m 同余的关系可以将全体整数分成 m 个类，即把对模 m 同余的数归于同一个类．由于余数可以是 $0,1,\cdots,m-1$，所以一共有 m 个类．每类称为模 m 的一个剩余类．剩余类的构造很简单，k 所在的类就是数集 $A_k=\{mq+k,\ q\in Z\}$，它可以看成是两端无限的一个以 m 为公差的等差数列．显然 $0,1,\cdots,m-1$ 分别属于不同的类．

例 1 设 $p(x)$ 是一个整系数多项式，若 $a\equiv b(n)$，则 $P(a)\equiv P(b)(n)$．

例 2 一个十进制数与它各位数字之和关于模 9 同余．特别地，它是 9 的倍数的充分必要条件是它的各位数字之和是 9 的倍数．

证 设 $n=a_k\cdot10^k+a_{k-1}\cdot10^{k-1}+\cdots+a_1\cdot10+a_0(0\leqslant a_i\leqslant9)$．由于 $10\equiv1(9)$，故 $10^i\equiv1$ (9)．所以

$$a_k\cdot10^k+\cdots+a_0\equiv a_k+\cdots+a_0 \ (9).$$

例 3 设 n 是奇数，则 $n^2\equiv1$ (8)．

证 设 $n=2k+1$，则 $n^2-1=8\cdot\frac{k(k+1)}{2}$．因为 $\frac{k(k+1)}{2}$ 是整数，所以 $8|n^2-1$，即 $n^2\equiv1$ (8)．

例 3 虽然简单，但是用处很多．

我们知道在等式的两端可以消去相同的非零约数，同余式两端是不是也可以消去对模与 0 不同余的约数呢？答案是否定的，例如 $9\equiv3$ (6)，但是 $3\not\equiv1$ (6)，即不能消去因子 3．

关于这一点，我们有

定理 1 若$(a,n)=1$，$ab\equiv ac$ (n)，则$b\equiv c$ (n)

证 由$n|ab-ac=b(b-c)$及$(n,a)=1$，故必有$n|b-c$，即$b\equiv c$ (n)。

由定理 1 可以推知，如果$a\equiv b$ (n)，$c\equiv d$ (n)，$(c,n)=1$，$c|a$，$d|b$，则$\frac{a}{c}\equiv\frac{b}{d}(n)$．因为由$c\cdot\frac{a}{c}\equiv d\cdot\frac{b}{d}\equiv c\cdot\frac{b}{d}(n)$并$(n,d)=1$，即可得到$\frac{a}{c}\equiv\frac{b}{d}$ (n)。

定理 2 若$(a,n)=1$，则必存在$\overline{a}$，使$a\overline{a}\equiv1$ (n)。

证 取$\overline{a}$，y使$a\overline{a}+ny=1$即得。

若$a|b$，$(a,n)=1$，则$a\cdot\frac{b}{a}\equiv b$ (n)，两端乘以$\overline{a}$，则有$\overline{a}b\equiv\overline{a}a\cdot\frac{b}{a}\equiv\frac{b}{a}$ (n)．因此可以把$\overline{a}$看成a的“倒数”．我们知道，在通常意义下非零的数才有倒数．而在同余的意义下，与模互素的数才有倒数

二、完全剩余系

定义 2 设$n\geqslant1$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$关于模n两两不同余，则称$a_1,\cdots,a_n$为模n的一个完全剩余系，简称模n的完系。

$0,1,\cdots,n-1$称为模n的最小非负完系．

显然完系中的n个数分别属于n个不同的剩余类。

例 4 设$n>0$，则必有一个n的倍数a，其十进制表示的各位数字为 0 或 1。

证 $n+1$个数$1,11,\cdots,\overbrace{11\cdots1}^{n+1\text{位}}$属于模$n$的至多$n$剩余类，故必有两个关于模$n$同余．设为$\overbrace{1\cdots1}^{k\text{位}}$和$\overbrace{1\cdots1}^{l\text{位}}$，$k<l$．即有$n|a=\overbrace{1\cdots1}^{l\text{位}}-\overbrace{1\cdots1}^{k\text{位}}=\overbrace{1\cdots1}^{l-k\text{位}}\overbrace{0\cdots0}^{k\text{位}}$。

例 5 设$n\geqslant2$，$(a,n)=1$，求证：必有$1\leqslant r\leqslant n-1$使$a\equiv$

$1(n)$

证 考察$a^0,a^1,\cdots,a^{n-1}$这n个数。由于它们都和n互素，因此不和0在同一个剩余类 所以这n个数属于模n的至多$n-1$个剩余类 因此必有两个属于相同的剩余类。即有$k<l$，使$a^l\equiv a^k(n)$，即$a^{l-k}\equiv 1(n)$。取$r=l-k$即可。

例 6 设$(a,n)=1$，r是使$a^r\equiv 1\ (n)$成立的最小正整数，$a^l\equiv 1(n)$，则$r|l$.

证 设$l=rq+t(0\leqslant t<r)$，则有$1\equiv a^l\equiv(a^r)^q\cdot a^t\equiv a^t(n)$，由$r$的最小性质可知必有$t=0$，即$r|l$.

例5和例6告诉我们应该在什么样的数中去寻找最小的正整数r，使$a^r\equiv 1(n)$。这在很多地方都有用处。

定理 3 如果$(a,n)=1$，$a_1,\cdots,a_n$是模n的一个完系，则$aa_1+b,\cdots$，aa_n+b也是模n的一个完系.

证 只要证明$aa_1+b,\cdots,aa_n+b$对模n两两不同余. 如果$aa_i+b\equiv aa_j+b(n)$，因为$(a,n)=1$，所以$a_i\equiv a_j(n)$。又a_1，$\cdots$，a_n是完系，所以只有$i=j$. 即得证

例 7 给数集$M=\{1,2,\cdots,n-1\}(n\geqslant 3)$的数染色，满足(1)$i$与$n-i$同色；(2)有一个$k\in M$，$(k,n)=1$，使得当$i\neq k$时$i$与$|k-i|$同色. 求证：$M$只有一色.

证 $0,1\cdots,n-1$是模n的最小非负完系，所以$0\cdot k$，$1\cdot k$，$\cdots$，$(n-1)k$是模n的一个完系. 令

$$lk=nq_l+r_l,\ (l=0,1,\cdots,n-1,0\leqslant r_l\leqslant n-1.)$$

则$r_l\equiv lk(n)$。所以$r_0,r_1,\cdots,r_{n-1}$是模n的最小非负完系.但是$r_0=0$，因此$\{r_1,\cdots,r_{n-1}\}=M$.只要证明r_{l+1}与$r_l(l=1,\cdots,n-2)$同色即可。由$(l+1)k=nq_l+r_l+k(l=1,2,\cdots,n-2)$出发。

若$r_l<n-k$，则$r_{l+1}=r_l+k$，由条件(2)，r_{l+1}与$r_{l+1}-k=r_l$同色. 若$r_l>n-k$，则$r_{l+1}=r_l+k-n$，于是r_{l+1}与$k-r_{l+1}=n-r_l$同色，由条件(1)它又要与r_l同色.

因为$n\nmid(l+1)k$，所以不可能有$r_l=n-k$.

三、缩剩余系

在第一节中，同余式的性质7°告诉我们，如果一个剩余类中有一个数与模n互素，则这个类中所有数都和n互素，因此我们可以说这个类是与模n互素的类．与模n互素的剩余类数记成$\varphi(n)$，$\varphi(n)$称为欧拉函数，在数论中是很重要的一个函数．显然$\varphi(1)=1$，而当$n\geqslant2$时$1\leqslant\varphi(n)<n$.

定义3 如果$a_1,a_2,\cdots,a_{\varphi(n)}$对模$n$两两不同余，并都和$n$互素，则称$a_1,a_2,\cdots,a_{\varphi(n)}$为模$n$的一个缩剩余系，简称为$n$的缩系．

显然，n的缩系的$\varphi(n)$个数分别属于与模n互素的不同的剩余类．

n的一个完系中与n互素的数组成n的一个缩系．

当$n\geqslant2$时，包含在最小非负完系中的那个缩系称为模n的最小正缩系．

如果p是素数，则$1,\cdots,p-1$就是模p的最小正缩系．由此我们马上得到$\varphi(p)=p-1$.

如果p是素数，$l\geqslant1$，从p^l的完系　$1,2,\cdots,p,\cdots,p^l$中去掉p^{l-1}个p的倍数$p,2\cdot p,\cdots,p^{l-1}\cdot p$，就得到模$p^l$的缩系．因此我们又有$\varphi(p^l)=p^l-p^{l-1}$.

一般而言，设$n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}$是$n$的标准因子分解式，则

$$\varphi(n)=(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1})\cdots(p_s^{\alpha_s}-p_s^{\alpha_s-1})$$

$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)=n\prod_{p\mid n}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

限于篇幅，这个公式就不证了．

定理4 如果$(a,n)=1$，$a_1,\cdots,a_{\varphi(n)}$是模$n$的一个缩系，则$aa_1,\cdots,aa_{\varphi(n)}$也是模$n$的缩系．（证明与定理3类似．）

定理5 （欧拉）设$(a,n)=1$，则$a^{\varphi(n)}\equiv1\ (n)$

证 设$a_1,\cdots,a_{\varphi(n)}$是模$n$的缩系，则$aa_1,\cdots,aa_{\varphi(n)}$也是模$n$的缩系，因此

$$aa_1\cdots aa_{\varphi(n)}\equiv a_1\cdots a_{\varphi(n)}(n).$$

由于$(a_i,n)=1$，可以在同余式两端把$a_1\cdots a_{\varphi(n)}$消去，就证明了定理.

由定理5和例6可知，使$a^r\equiv 1(n)$成立的最小正整数r是$\varphi(n)$的因子.

定理5的一个特例就是

定理6 （费尔马）设p是素数，则$n^p\equiv n(p)$.

证 $p|n$时，显然. 如$p\nmid n$，则由定理5，$n^{p-1}\equiv 1(p)$，即$n^p\equiv n(p)$.

例8 设p为素数，则$(p-1)!\equiv -1(p)$.

证 $p=2,3$时，显然. 设p是大于3的素数，对任意$2\leqslant a\leqslant p-2$，必有$\overline{a}$，$2\leqslant \overline{a}\leqslant p-2$，使$\overline{a}a\equiv 1(p)$，必$a\neq \overline{a}$，否则$a^2=1(p)$，即$p|(a+1)(a-1)$，故$a\equiv \pm 1(p)$，此为不可能. 又显然当$a\not\equiv a'(p)$时，必$\overline{a}\not\equiv \overline{a'}(p)$，由此可以将$2,3,\cdots,p-2$按$a$和$\overline{a}$配成$\frac{p-3}{2}$对数. 故$2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(p-2)\equiv 1(p)$，也就是$(p-1)!\equiv -1(p)$.

例8就是著名的威尔逊定理.

威尔逊定理的逆命题也成立的，因为我们有下面的例题.

例9 若$n>5$，n是合数，则$(n-1)!\equiv 0(n)$.

证 设$n=n_1n_2$，$2\leqslant n_1\leqslant n_2$，并且$n_2\geqslant 3$. 由于$n-1\geqslant 3n_1-1>2n_1$，故$1,2,\cdots,n-1$中有两个数是$n_1$的倍数，其中必有一个不等于$n_2$，所以$1,2,\cdots,n-1$中有两个数分别是$n_1$和$n_2$的倍数，即有$n=n_1n_2|(n-1)!$.

四、同余方程组

先看一次同余方程的求解问题.

定理 7　若$(a,n)=1$，则方程　$ax+b\equiv 0(n)$　　　　(1)
有解．这些解组成模 n 的一个剩余类(对于这种情况，我们说解对模 n 是唯一的)．

证　显然 $x_0=-\overline{a}b$ 是(1)的解，这里 $\overline{a}$ 满足 $a\overline{a}\equiv 1(n)$．并且当 $x\equiv x_0(n)$ 时，x 也满足(1)式．又如果 x_1 是(1)的一个解，则有 $ax_0+b\equiv ax_1+b(n)$，即 $x_1\equiv x_0(n)$．因此(1)的解模 n 唯一．

定理 8　设$(m,n)=1$，则方程组 $x\equiv a(m)$，$x\equiv b(n)$ (2)
对模 mn 有唯一解．

证　令 $x=a+mt$，于是有 $a+mt\equiv b\ (n)$．可见，可以取 $t=\overline{m}(b-a)$，这里 $\overline{m}$ 满足 $m\overline{m}\equiv 1(n)$．于是 $x_0=a+m\overline{m}(b-a)$ 就是方程组(2)的一个解．直接代入(2)的两个方程也可以证明 $x_0\equiv a(m)$ 和 $x_0\equiv b(n)$．

如果 $x_1\equiv x_0(mn)$，则有 $x_1\equiv x_0\equiv a(m)$ 及 $x_1\equiv x_0\equiv b(n)$．因此，x_0 所在的模 mn 的剩余类中的数都是(2)的解．

又如果 x_1 适合(2)式，则有 $x_1\equiv a\equiv x_0(m)$，即 $m|x_1-x_0$，类似有 $n|x_1-x_0$．由于$(m,n)=1$，故 $mn|x_1-x_0$，即 $x_1\equiv x_0(mn)$．

定理 8 是孙子定理的特殊情况．孙子定理的一般情形为

定理 9　设 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 两两互素，则方程组

$$x\equiv a_1(m_1),\cdots,\ x\equiv a_n(m_n)\qquad(3)$$

有解．它的解关于模 $m_1,\cdots,m_n$ 还是唯一的．孙子定理一般称为中国剩余定理．

例 10　在运动会上进行团体操表演，需从每排 16 人的矩形阵变换为每排 23 人的矩形阵，在进行这两种阵形表演时分别要有 4 人和 5 人作前导旗手，问至少要多少人参加表演？

解　设要有 x 人，由题意可知 $x\equiv 4(16)$，$x\equiv 5(23)$．　(4)
由第一个同余式可知$(x,16)=(4,16)=4$，所以要有 $x=4y$，因而方程组化成　　$y\equiv 1(4)$，$4y\equiv 5(23)$．　　　　(5)

因为 $4\times6-23\times1=1$，所以 $\overline{4}=6$. 因而(5)又可化成

$$y\equiv1\ (4),\ y\equiv30\equiv7\ (23). \tag{6}$$

令 $y=1+4t$ 可知 $4t\equiv6\ (23)$，即 $t\equiv36\equiv13\ (23)$，因此 $y=1+4t=1+4(13+23u)$，即 $x=4y=4+16\times13+16\times23u$. 可得(4)的解为 $x\equiv4+16\times13\equiv212\ (368)$.

所以最少要 212 人.

习　题　39

1. 设 p 为素数，$a^p\equiv b^p\ (p)$，则 $a^p\equiv b^p\ (p^2)$.
2. 求证在 11，111，…中没有平方数.
3. 设 $n=4k+2$，$|x_i|=1$，求证 $x_1+2x_2+\cdots+nx_n\neq0$.
4. 设 p 为奇素数，证明 2^p-1 的素因子有形式 $2px+1$.
5. 求 $7^{7^{\cdot^{\cdot^{7}}}}$（$k$重）$(k\geqslant1)$ 的末二位数(按十进位制).
6. 求证：5 个连续正整数之积不是平方数.
7. 设 $n_1|2^{n_2}-1$，$n_2|2^{n_3}-1$，…，$n_{k-1}|2^{n_k}-1$，$n_k|2^{n_1}-1$. 求证：$n_1=n_2=\cdots=n_k=1$.
8. 设 p 为奇素数，a,b 与 p 互素. 求证：必存在 $0<x<\sqrt{p}$，$0<y<\sqrt{p}$，使 $a^2x^2\equiv b^2y^2\ (p)$.
9. 设 $x_0=x_1=1$，$x_{n+1}=x_n+2x_{n-1}(n\geqslant1)$，$y_0=1,y_1=7,y_{n+1}=2y_n+3y_{n-1}\ (n\geqslant1)$. 求证：数列 $x_1,x_2,\cdots$ 与 $y_1,y_2,\cdots$ 中没有相同的数.
10. 设 p 为奇素数，求证在 $1,2,\cdots,p-1$ 中恰有 $\frac{p-1}{2}$ 个关于模 p 与一平方数同余.
11. 设 p 为素数，$a_1,\cdots,a_p$ 和 $b_1,\cdots,b_p$ 是模 p 的两个完系，求证 $a_1b_1,\cdots,a_pb_p$ 不是模 p 的完系.

第40讲 不定方程

谢盛刚

不定方程是初等数论中最有趣的内容．解不定方程不但要熟知初等数论的基础知识，还要能十分灵活巧妙地加以运用．一个方程摆在面前往往令人一筹莫展，一旦柳暗花明，顺利解决，又令人拍案叫绝，欣喜若狂．这正是它的魅力所在．

一、二元一次不定方程

二元一次不定方程是指 $ax+by=c$. (1)

定理1 方程(1)有解的充分必要条件是 $(a,b)\mid c$. 如 x_0, y_0 是(1)的一组解，则

$$x=x_0+\frac{b}{(a,b)}t,\quad y=y_0-\frac{a}{(a,b)}t\ (t\in Z) \tag{2}$$

是(1)的全部解．

证 先证条件是充分的．当 $(a,b)=1$ 时，取 x_0, y_0 使 $ax_0+by_0=1$. 于是 x_0c, y_0c 就是(1)的解．一般当 $(a,b)\mid c$ 时，由于 $\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}\right)=1$, 故由上述可知 $\frac{a}{(a,b)}x+\frac{b}{(a,b)}y=\frac{c}{(a,b)}$ 有解．这些解显然也是(1)的解．

再证条件的必要性．如(1)有解 (x_0, y_0)，则 $ax_0+by_0=c$. 由于 $(a,b)\mid a$, $(a,b)\mid b$, 故 $(a,b)\mid ax_0+by_0=c$.

显然(2)都是(1)的解，如果 x_1, y_1 也是(1)的解，则有 $a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)=0$, $\frac{a}{(a,b)}(x_1-x_0)+\frac{b}{(a,b)}(y_1-y_0)=0$. 由于 $\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{b}{(a,b)}\right)=1$，所以 $\frac{b}{(a,b)}\Bigm| x_1-x_0$，即有 $t\in Z$ 使 x

$=x_0+\frac{b}{(a,b)}t$，于是$y_1=y_0-\frac{a}{(a,b)}t$.

我们还可以看出解不定方程(1)与解同余方程

$$\frac{a}{(a,b)}x\equiv\frac{c}{(a,b)}\left(\frac{b}{(a,b)}\right)$$

是等价的，因而它的解是模$\frac{b}{(a,b)}$的一个剩余类.

定理 1 的证明过程也指出了求解的方法.

例 1 求 $24x+15y=111$ 的通解和正整数解.

解 方程等价于

$$8x+5y=37. \tag{3}$$

由辗转相除法

$(8,5)=(8-5,5)=(3,5)=(3,5-3)=(3,2)=(3-2,2)=1$,

$1=3-2=3-(5-3)=2\times3-5=2\times(8-5)-5=2\times8-3\times5$.

故(3)有一组解 $x_0=37\times2=74$，$x_0=-3\times37=-111$. 故

$$x=74-5t,\quad y=-111+8t\quad(t\in Z) \tag{4}$$

是(3)的全部解.

求正整数解，只要取 t 使 $x>0, y>0$ 即可. 得$\frac{74}{5}>t>\frac{111}{8}$，只有 $t=14$，于是 $x=4, y=1$.

定理 2 设 $a,b>0,(a,b)=1$，则当 $c>ab-a-b$ 时，

$$ax+by=c \tag{4}$$

有非负整数解. 但当 $c=ab-a-b$ 时(4)无非负整数解.

证 设 x_0, y_0 是(4)的一组解，则

$$x=x_0+bt,\quad y=y_0-at$$

也是(4)的解. 取 t 使 $0\leqslant x\leqslant b-1$. 于是当 $c>ab-a-b$ 时，

$$bx=c-ax\geqslant c-a(b-1)>ab-a-b-(ab-a)=-b,$$

故 $y>-1$，即 $y\geqslant0$.

又若有 $x\geqslant0$，$y\geqslant0$，使 $ax+by=ab-a-b$，则有 $ab=a(x+1)+b(y+1)$. 由于 $(a,b)=1$，要有 $a|y+1$，$b|x+1$，又

由于 $y+1>0, x+1>0$，故 $y+1\geqslant a, x+1\geqslant b$. 故 $ab=a(x+1)+b(y+1)\geqslant 2ab$ 不可能.

第 38 讲定理 6 告诉我们，当 $(a_1,\cdots,a_n)|c$ 时，方程

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=c \tag{5}$$

有解. 当 $n>2$ 时通解公式比较烦，就不介绍了. 而当 $n>2, a_1, \cdots, a_n$ 都大于 0 时，要求最大的 c 使方程(5)无非负整数解的问题则还是一个没有完全解决的问题.

二、勾股数

中国工匠在很早的时候就已经知道勾三、股四、弦五，并用这个道理来画直角了.

一般，把满足方程 $$x^2+y^2=z^2 \tag{6}$$
的一组整数称为一组勾股数. 求勾股数也就是求解不定方程(6).

由(6)可以看出，只要求出(6)的全部非负整数解，另外的解也就可以求出来. 又如果已经求出(6)的所有满足 $(x,y)=1$ 的解，另外的解也就可以都求出来. $(x,y)=1$ 的解称为 (6) 的本原解. 下面来求(6)的非负本原解.

解不定方程的一种常用办法是，假定已经求出了方程的解，再根据方程的限制来看这些解应具有的性质. 设 (x,y,z) 是(6)的非负本原解.

因为 $(x,y)=1$，故 x，y 中必有一个奇数，但不可能都是奇数. 因若不然，则 z 是偶数，于是有

$$x^2\equiv y^2\equiv 1\ (4),\quad x^2+y^2\equiv 2\ (4),\quad z^2\equiv 0\ (4).$$

后二式说明 $x^2+y^2\not\equiv z^2\ (4)$，自然 $x^2+y^2\neq z^2$.

设 $2|x, 2\nmid y$. 由(6)，$\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{z-y}{2}\cdot\frac{z+y}{2}$. 由于 $\left(\frac{z-y}{2}, \frac{z+y}{2}\right)=\left(z, \frac{y+z}{2}\right)\leqslant(z, y+z)=(y,z)=1$. 所以 $\left(\frac{z-y}{2}, \frac{z+y}{2}\right)=1$. 因此 $\frac{z-y}{2}=v^2$, $\frac{z+y}{2}=u^2$, $\frac{x}{2}=uv$,

$u>v>0$, $(u,v)=1$. 解之得 $z=u^2+v^2$, $y=u^2-v^2$, $x=2uv$, u, $v>0$, $(u, v)=1$. 又因 z 是奇数，所以 u, v 一奇一偶. 容易验证，对任何正整数 $u>v>0$, $(u, v)=1$, u, v 一奇一偶. $x=2uv$, $y=u^2-v^2$, $z=u^2+v^2$ 都是(6)的正的本原解. 这样，

$$x=2uv,\ y=u^2-v^2,\ y=u^2+v^2$$

$$(u>v>0,\ (u,v)=1,\ u,v\text{一奇一偶})$$

就是 (6) 的所有 $2|x$ 的正的本原解，由此可以求出 (6) 的所有整数解.

费马尔提出了一个有名的猜想：当 $n\geqslant3$ 时

$$x^n+y^n=z^n$$

没有整数解.

经过三百多年的艰苦努力，数学家在费尔马猜想上已经取得了很大的进展，并且在研究这个猜想的过程中，使数论的内容和工具都有了十分重要的发展. 费尔马猜想的最终解决，也许还难以预期，但是数学家们在探求解决这个问题的过程中，必将获得比问题本身更为重要的成果. 有许多青年朋友试图以初等方法一举解决这个重大历史难题 .事实已经证明这种努力都是白费，许多人为此浪费了宝贵的青春，是很不值得的.

三、佩尔(Pell)方程

设 $D>0$, 且 D 不是平方数，方程

$$x^2-Dy^2=C \tag{7}$$

称为 Pell 方程. 我们先研究方程

$$x^2-Dy^2=1. \tag{8}$$

如果 x, y 是(8)的解，说明 $\frac{x^2}{y^2}-D=\frac{1}{y^2}$. 因此当$y$比较大时$\frac{x}{y}-\sqrt{D}$就很小 .因此$\frac{x}{y}$应当是$\sqrt{D}$的很好的近似分数. 一般用分母为 $Q(Q\geqslant1)$的分数去近似表示一个无理数 α, 只能使误

差小到$\frac{1}{Q}$以内．但有一些Q，却能使这个差小到$\frac{1}{Q^2}$以内．这是有理数分布中的一个重要现象．

定理3 如果方程(8)有非零解，则有无穷多解．

证 设(x_1, y_1)是(8)的非零解．可设$x_1>0$，$y_1>0$，令$x_n+y_n\sqrt{D}=(x_1+y_1\sqrt{D})^n$，则$(x_n, y_n)$也是解．要证明这一点，首先注意到

$$x_n-y_n\sqrt{D}=(x_1-y_1\sqrt{D})^n$$

(这一点由归纳法很容易证明)．于是

$$x_n^2-Dy_n^2=(x_1^2-Dy_1^2)^n=1.$$

由于$(x_1+y_1\sqrt{D})^n$是严格增加的，所以得到的解都不同．

定理4 如果$\varepsilon=x_1+y_1\sqrt{D}$是(8)的最小正解，则$x_n+y_n\cdot\sqrt{D}=(x_1+y_1\sqrt{D})^n$就得到(8)的全部正解．(证略)

引理 设α是无理数，$Q\geqslant 1$，则必有整数x, y，$1\leqslant y\leqslant Q$，使$|x-\alpha y|<\frac{1}{Q}$.

证 将$\{0\cdot\alpha\}, \{1\cdot\alpha\}, \cdots, \{Q\alpha\}$ ($\{x\}$表示x的小数部分，即$\{x\}=x-[x]$)这$Q+1$个数按大小次序排列起来，这些点连同1，把区间$[0, 1]$分成$Q+1$个小区间，因为α是无理数，这些小区间长度都要大于零，其中必有一个，其长度小于$\frac{1}{Q+1}$．设这个区间为$[\{m\alpha\}, \{n\alpha\}]$$(m\neq n)$或者$[\{n\alpha\}, 1]$．即有

$$|[m\alpha]-[n\alpha]-(m-n)\alpha|<\frac{1}{Q+1}.$$

显然$1\leqslant|m-n|\leqslant Q$，取$y=|m-n|$就行了．当区间$[\{n\alpha\}, 1]$的长度小于$\frac{1}{Q+1}$时，可以类似地证明．

推论 设α是无理数，则必有无穷多个分数$\frac{x}{y}$，使$\left|\alpha-\frac{x}{y}\right|<\frac{1}{y^2}$.

证 用反证法．如果只有有限多个，令这些分数与α之间的最小距离为τ，因α为无理数，必$\tau>0$．取整数$Q>\frac{1}{\tau}$，则由引理可知，必有$x, y, Q\geqslant y\geqslant 1$，使

$$|x-\alpha y|<\frac{1}{Q}<\tau.$$

于是又有

$$\left|\frac{x}{y}-\alpha\right|<\frac{1}{Qy}\leqslant\frac{1}{y^2},\quad \left|\frac{x}{y}-\alpha\right|<\frac{\tau}{y}\leqslant\tau.$$

上面第一个不等式说明$\frac{x}{y}$在假设中所说的那些有理数中，第二个不等式说明$\frac{x}{y}$不在其中，就得到矛盾．

定理5 设$\sqrt{D}$不是整数，则存在k，$|k|<2\sqrt{D}+1$，使$x^2-Dy^2=k$有无穷多解

证 由引理的推论，存在无穷多对整数x, y；使$\left|\frac{x}{y}-\sqrt{D}\right|<\frac{1}{y^2}$，故$\left|\frac{x}{y}+\sqrt{D}\right|\leqslant 2\sqrt{D}+\left|\frac{x}{y}-\sqrt{D}\right|<2\sqrt{D}+\frac{1}{y^2}$．因此$\left|\frac{x^2}{y^2}-D\right|<\frac{1}{y^2}(2\sqrt{D}+1)$．即是有无穷多对整数$x, y$，使$|x^2-Dy^2|<2\sqrt{D}+1$．由于只有有限多个整数$k$满足$|k|<2\sqrt{D}+1$，因此其中必有一个$k$，使有无穷多对$x, y$，满足$x^2-Dy^2=k$．

定理6 方程(8)有解．

证 取k使$x^2-Dy^2=k$有无穷多解．这些解按照模$|k|$分类，至多有k^2类．因而必有两组不同的正整数解(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，使

$$x_1\equiv x_2\ (|k|),\quad y_1\equiv y_2\ (|k|).$$

于是有

$$k^2=(x_1^2-Dy_1^2)(x_2^2-Dy_2^2)=(x_1x_2-Dy_1y_2)^2-D(x_1y_2-x_2y_1)^2.$$

但是

$$x_1x_2-Dy_1y_2\equiv x_1^2-Dy_1^2\equiv 0\ \ (|k|),$$

$$x_1y_2-x_2y_1\equiv x_1y_1-x_1y_1\equiv 0\ \ (|k|).$$

所以，$x_0=\dfrac{x_1x_2-Dy_1y_2}{k}$，$y_0=\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{k}$就是(8)的解。

由定理 1 可知，方程(8)有无穷多组解。

另一个佩尔方程

$$x^2-Dy^2=-1 \tag{9}$$

比较困难，不作仔细研究，只进行一些简单的讨论。

定理 7 如果方程(9)有正整数解(x_1, y_1)，令 $x_n+\sqrt{D}y_n=(x_1+\sqrt{D}\,y_1)^n$，则$(x_{2n},\ y_{2n})$是(8)的解，$(x_{2n-1},\ y_{2n-1})$ 是(9)的解。(证明与定理3类似，略。)

定理 8 如果(x_0, y_0)是方程(7)的正整数解，(x_1, y_1)是方程(8)的正整数解，$x+\sqrt{D}y=(x_0+\sqrt{D}\,y_0)(x_1+\sqrt{D}y_1)$，则$x$，$y$是方程(7)的正整数解。(证明与定理3类似，略。)

例 2 求证：有无穷多个n使前n个自然数的均方根为整数。

证 设前n个自然数的均方根等于整数k，于是

$$k=\left(\frac{1^2+\cdots+n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}},$$

即有 $2n^2+3n+1=6k^2$. 整理得

$$(4n+3)^2-48k^2=1. \tag{10}$$

只要证明佩尔方程

$$x^2-48y^2=1 \tag{11}$$

有无穷多组解(x, y)，使 $x\equiv 3\ (4)$.

由于 $x^2-48y^2=1$ 有解$(7, 1)$，故$(7+\sqrt{48})^k=x_k+\sqrt{48}y_k$就给出(11)的解. 用归纳法可证明

$x_{2k-1}\equiv 3\ (4)$，$x_{2k}\equiv 1\ (4)$. 于是 $n=\dfrac{x_{2k-1}-3}{4}\ \ (k=1, 2, \cdots)$

就是方程(10)的解．前两个解是$n=1$，337．

四、杂　例

例3　求正整数k，n，使$1!+2!+\cdots+n!=k^2$．

解　直接计算可得到$k=n=1$，$k=n=3$两组解．当$n\geqslant 4$时

$$1!+2!+\cdots+n!\equiv 1+2+6+24\equiv 3\ (5)$$

但平方数模5余0，1，4，故不能有其他解．

例4　求方程$2^n-1=y^k$，$k>1$的正整数解．

解　显然$n=y=1$，$k\in N$是方程的解．

显然$n=2$不可能有解．以下设$n>2$，显然y是奇数．

如果k是奇数，则有

$$2^n=(y+1)(y^{k-1}-y^{k-2}+\cdots-y+1)．$$

因为$y^{k-1}-y^{k-2}+\cdots-y+1$由$k$个奇数相加而成，因而也是奇数．与左边比较，这个和只能是1．因而$2^n=y+1$，即$k=1$，不合要求．

如果k是偶数，则$y^2\equiv 1\ (8)$，故$y^k\equiv 1\ (8)$，从而$2^k-1\equiv 1\ (8)$．但当$n>1$时，这是不可能的．因此方程没有$k>1$，$y>1$的解．

例5　求方程$x^3+y^3+z^3=3xyz$的整数解．

解　$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0．$$

若$x+y+z=0$，则取$x=u$，$y=v$，$z=-u-v$．

由$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$得

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0,$$

可取$x=y=z=w$．所以方程的全部整数解为

$$\begin{cases} x=u, \\ y=v, \\ z=-u-v. \end{cases}\quad u，v\in Z \text{ 或 } x=y=z=w, w\in Z．$$

例6　求方程$3\cdot 2^x+1=y^2$的正整数解．

解 $x=1,2$ 时方程无解．设 $x\geqslant 3$．由于 $(y,6)=1$，故 $y=6k\pm 1$．代入方程有，

$$3\cdot 2^x+1=36k^2\pm 12k+1,$$

即有

$$2^{x-2}=k(3k\pm 1)\ . \tag{12}$$

$k=1$ 时，得到二组解 $x=3$，$y=5$ 和 $x=4$，$y=7$．而 $k>1$ 时，(12)右端必有奇素因子，因为如 k 是偶数，则 $3k\pm 1$ 为奇数，这与左端为2的方幂相矛盾．故没有 $k>1$ 的解．

例 7 求证：圆 $x^2+y^2=1$ 上有无穷多个有理点．

证 由于 $m^2+n^2=k^2$ 有无穷多组整数解，并满足 $(m,k)=(n,k)=1$，于是 $x=\dfrac{m}{k}$，$y=\dfrac{n}{k}$ 就是单位圆上的有理点．

例 8 求方程 $(n-1)!=n^k-1$ 的正整数解．

解 当 $n=2,3$ 时得到 $k=1$．$n=4$ 时无解．$n=5$ 时 $k=2$．设 $n\geqslant 6$，由于 $(n-1)!$ 为偶数，故 n 为奇数，因而 $n-1$ 是一个合数．于是由第 39 讲的例 9 有

$$(n-2)!\equiv 0\ \ (n-1).$$

又由于 $n\equiv 1\ \ (n-1)$，及 $(n-2)!=n^{k-1}+n^{k-2}+\cdots+n+1$，故

$$(n-2)!\equiv 1+1+\cdots+1\equiv k\equiv 0\ \ (n-1).$$

即 $n-1\mid k$，因而 $k\geqslant n-1$．于是又有

$$(n-1)!=n^k-1\geqslant n^{n-1}-1.$$

当 $n\geqslant 6$ 时是不可能的．所以方程只有三个解：

$$(n,k)=(2,1),\ (3,1),\ (5,2).$$

例 9 求方程 $x^2+y^2+z^2=x^2y^2$ 的正整数解．

解 由于 $(x^2-1)(y^2-1)=z^2+1$，可知 x，y 均为偶数（否则，左边 $\equiv 0\ (4)$，而右边 $\equiv 1$ 或 $2\ (4)$），因而 z 也是偶数．令 $x=2^\alpha x_1$，$y=2^\alpha y_1$，$z=2^\alpha z_1$，其中 $\alpha\geqslant 1$ 并且 x_1，y_1 中至少有一个是奇数，于是有

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=4^\alpha x_1^2y_1^2. \tag{13}$$

由于 x_1,y_1 一奇一偶，故

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2\equiv 1+z_1^2\equiv 1\text{或}2 \pmod 4,$$

但由(13)及 $\alpha\geqslant 1$ 可知

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2\equiv 0 \pmod 4$$

这是不可能的。所以原方程无解。

例 10 求方程 $2x^n=y^{n-1}$ 的正整数解。

解 由于$2|y$，设 $y=2^l\cdot y_1, 2\nmid y_1$，$x=2^r x_1, 2\nmid x_1$，于是有 $2^{1+2n}x_1^n=2^{(n-1)l}y_1^{n-1}$。所以$1+rn=(n-1)l$，解二元一次不定方程$(n-1)l-nr=1$ 可得

$$l=nt-1,\ r=(n-1)t-1\ (t\geqslant 1).$$

又有 $x_1^n=y_1^{n-1}$，必有 $x_1=u^{n-1}$，$y_1=v^n$。因而

$$x=2^{n-2}(2^{t-1}u)^{n-1}=2^{n-2}m^{n-1},$$

$$y=2^{n-1}(2^{t-1}v)^n=2^{n-1}k^n.$$

其中 $n\geqslant 2$，$m>1$，$k\geqslant 1$。

习 题 40

1. 求方程$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$的正整数解.
2. 设 $x,y>0,(x,y)=1$. 售油处有装 x 千克和 y 千克的容器各一只，求证：只要顾客要购买的油是整数千克，就可以只用这两只容器进行销售.
3. 求方程 $x^{2n+1}=2^r\pm 1, x>1$ 的正整数解.
4. 求方程 $x^3+y^3+z^3=x+y+z=3$ 的整数解.
5. 证明：方程 $15x^2-7y^2=9$ 无整数解.
6. 求 $y^2=1+x+x^2+x^3+x^4$ 的整数解.
7. 求方程 $2^x-3^y=1$ 的正整数解.
8. 求方程 $x^y=y^x+1$ 的正整数解.
9. 求正整数 n，使前 n 个自然数之和为平方数.

第41讲 记数法

谢盛刚

一、记数制

选定一个大于1的整数 b，就可以把非负整数用 b 的一些幂的不超过 $b-1$ 的非负倍数之和唯一地表示出来，这就是以 b 为基的 b 进计数制．写成式子就是

$$N=a_0+a_1\cdot b^1+a_2\cdot b^2+\cdots+a_n\cdot b^n\quad(0\leqslant a_i\leqslant b-1).\quad(1)$$

b 进制记数法的基本原则就是"逢 b 进1"．把一个正整数 N 表成 b 进制数就是不断用 b 的幂作带余除法．

设 $b^l\leqslant N<b^{l+1}$ $(l\geqslant0)$，由带余除法可知

$$N=a_lb^l+r_1,\quad 1\leqslant a_l\leqslant b-1,\quad 0\leqslant r_1<b^l.$$

这里的不完全商 a_l 就是 N 在 b 进制中的首位数字．再用 b^{l-1} 去除 r_1 得到的不完全商 a_{l-1} 就是 N 的第二位数字，如此等等．最后有 $N=a_lb^l+a_{l-1}b^{l-1}+\cdots+a_1\cdot b^1+a_0\cdot b_0$ $(0\leqslant a_i\leqslant b-1)$．
这个表示法写成 b 进制数就是 $N=(a_la_{l-1}\cdots a_1a_0)_b$．

在这一讲里，十进制数的基数10都省去不写．

用 b 进制数也同样可以记负整数，有理数和无理数，可以证明一个数是有理数的充分必要条件是它的 b 进制表示是一个循环小数．由于我们只讲非负整数，这些就不深入讨论了．

例1 将203表成2进制，3进制和12进制数，在12进制中记10为 t，11为 e．

解 $203=2^7+75=2^7+2^6+11=2^7+2^6+2^3+2+1$
$=(1100111)_2$，

$203=2\cdot3^4+41=2\cdot3^4+3^3+14=2\cdot3^4+3^3+3^2+3+2=(21112)_3$，

$203=12^2+59=12^2+4\cdot12+11=(14e)_{12}$．

b 进位制数的四则运算与十进位制数的四则运算有许多相同之处．加法按“逢 b 进 1”的原则就行，减法也是不够减时向前一位数字借 1 成 $(10)_b$，乘法就是连加运算，除法就是连减运算，等等．

例 2 设 C 是一个正整数集，C 中的数写成 3 进制时，各位数字都不为 2．求证：C 中任意三个数都不组成等差级数．

证 设 C 中三个数 x, y, z 为等差级数，$2y = x + z$．对这个和式用 3 进制进行运算．由于 x, z 的各位数字均不超过 1，所以在运算过程中未发生进位的情况，并且 $2y$ 的各位数字不是 0 就是 2．$2y$ 的某一位上如果是 0，则 x，z 的对应位也是 0；如果 $2y$ 的某一位上是 2，则 x，z 对应位上的数字就都是 1，由此必然有 $x = z = y$．

一般的习惯总是认为把一个正整数写成 b 进制数时，各位数字都必须是非负的．其实，在 $b = 2k+1$ 时，b 进制数的系数还可以用 $-k, -k+1, \cdots, 0, 1, \cdots, k-1, k$ 这 $2k+1$ 个值．我们称这种写法为 b' 制数．把 b 进制数换成 b' 制数很容易，只要从个位开始，把第一个遇到的大于 k 的系数 l 改成 $l-2k-1$ 并向前一位进 1，依次做到最后就行了．在记数中把 $-l$ 写成 $\bar{l}$．

例如前面举的例子 $203 = (2\,1\,1\,1\,2)_3 = (2\,1\,1\,2\,\bar{1}) = \cdots = (1\,\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1})_{3'}$．

采用 $3'$ 制表明，可以将一个正整数唯一地记成一些不同的 3 的方次数的和与差．

例 3 设 $2n$ 枚棋子分成两堆，把某一堆中的 $3^k (k \geqslant 0)$ 枚棋子拨入另一堆去，称为一次“调整”，拨过去的棋子数称为“调整数”．求证：必可经过调整数为严格减少的有限次调整，使两堆棋子数相等．

证 设甲堆棋子比乙堆棋子多．由于棋子总数为 $2n$，故棋子差数为 $2m$．要调整到两堆棋子一样多，就必须从甲堆调整 m

枚棋子到乙堆里去. 把 m 写成 $3'$ 制数，其系数为 1 的项就是要由甲堆棋子拨入乙堆的调整数，系数为 -1 的项就是由乙堆拨入甲堆的调整数. 依 3 的方次数由大到小逐次调整就能达到最终目的. 从证明过程中可以看出，这种调整方式还是唯一的.

二、二进制的四则运算

二进制的加法表很简单，就是：$0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=(10)_2$. 二进制的乘法表也很简单，就是：$0\times0=0, 0\times1=0, 1\times0=0$，$1\times1=1$.

例如 $(11011)_2+(111)_2$，列成算式就是

```
     1 1 0 1 1
 +  、 、 、1、1、1   (打“、”的地方表示进过位)
 ----------------
  (1 0 0 0 1 0)₂
```

又如，$(1101)_2\times(101)_2$，列成算式就是

```
         1 1 0 1
 ×         1 0 1
 ----------------
         1 1 0 1
       0 0 0 0       (打“、”的地方表示进过位)
    、1、1、0、1
 ----------------
  ( 1 0 0 0 0 0 1)₂
```

减法是加法的逆运算，也可以用不够减借 1 成 $(10)_2$ 的方法进行. 但是在计算机里不用这个方法，因为这样做会增加机器运算的次数. 通常用的是“补数法”，这种方法在心算中也常用到，例如要减去 97，就加上 3 再减去 100，3 就是 97 的补数. 这里计算的过程是求出补数，然后作被加数与补数的加法，最后减去一个 10 的方次数. 后两步做起来都很容易，第一步在二进制中做起来也很容易. 例如 $(101)_2$ 的补数就是 $(1000)_2-(101)_2=(11)_2$. 实际计算的时候，从个位开始往前看，第一个 1 不变，以后把 0 换成 1，1 换成 0，就得到补数. 例如求 $(11101)_2-(1011)_2$，先求出 $(1011)_2$ 的补数为 $(101)_2$. 于是 $(11101)_2-(1011)_2=(11101)_2+(101)_2-(10000)_2=(1101)_2+(101)_2=(10010)_2$.

除法运算可用连减代替，同时减法也用补数法做．例如用 $(1101)_2$ 除 $(101101)_2$，列成算式就是

```
              1 1
1101) 1 0 1 1 0 1
    -   1 1 0 1
      ---------
        0 1 1 0    —(10110)₂-(10000)₂
    +   0 0 1 1    —(1101)₂的补数
      ---------
        1 0 0 1 1
    -     1 1 0 1
      -----------
          0 0 1 1  —(10011)₂-(10000)₂
    +     0 0 1 1  —(1101)₂的补数
      -----------
            1 1 0
```

即得到 $(101101)_2=(1101)_2\times(11)_2+(110)_2$.

三、有关二进制的例题

例4 若一个二进制整数的各位数字之和为偶数，则称为一个 A 数，否则称为一个 B 数．求前 2^l 个 A 数之和 M.

解 用 $A(n)$ 和 $B(n)$ 分别表示不超过 n 的 A 数之和及 B 数之和．显然，$2n, 2n+1$ 中有一个 A 数，一个 B 数．所以，在 $0, 1, \cdots, 2^{l+1}-1$ 中 A 数和 B 数各有 2^l 个．因此 $M=A(2^{l+1}-1)$.

又显然有 $A(n)+B(n)=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

设 $0\leqslant m\leqslant 2^l-1$，则在 2^l+m 与 m 中一个为 A 数，一个为 B 数．因此，如果有一个 B 数 m，就得到一个 A 数 2^l+m．由此可建立 $[0, 2^l-1]$ 中的 B 数 m 与 $[2^l, 2^{l+1}-1]$ 中的 A 数 2^l+m 之间的一一对应．对 $[0, 2^l-1]$ 中的 B 数 m 求和，就得到

$$M=A(2^l-1)+\sum_{\substack{0\leqslant m\leqslant 2^l-1\\ m\in B}}(2^l+m)$$

$$=A(2^l-1)+2^l\cdot 2^{l-1}+B(2^l-1)$$

$$=2^{l-1}(2^l-1)+2^{2l-1}=2^{2l}-2^{l-1}.$$

例5 f 是定义在全体正整数集上的函数．设正整数 n 的二

进制表示为$(a_la_{l-1}\cdots a_1a_0)_2$，则$f(n)$的值等于把$a_i$中的0换成$-1$，即令$b_i=2a_i-1$，则$f((a_la_{l-1}\cdots a_1a_0)_2)=(b_lb_{l-1}\cdots b_1b_0)_2$. 求$f$的一个递推公式.

解 设$2^l\leqslant n<2^{l+1}-1$，$n=a_l2^l+a_{l-1}2^{l-1}+\cdots+a_1\cdot 2+a_0$. 于是将$a_i$中为0的数改成1就变成$2^{l+1}-1$. 所以增加的这些数就是$2^{l+1}-n-1$，于是得到$f(n)=n-(2^{l+1}-n-1)=2n+1-2^{l+1}$. 当$n=2k$时，$f(2k)=4k+1-2^{l+1}=2(2k+1-2^l)-1=2f(k)-1$. 当$n=2k+1$时，$f(2k+1)=4k+3-2^{l+1}=2(2k+1-2^l)+1=2f(k)+1$. 亦即得到下列公式

$$f(1)=1, f(2k)=2f(k)-1, f(2k+1)=2f(k)+1.$$

例6 设正整数a,b互素，A表示以a为首项，2为公比的等比数列，B表示以b为首项，2为公比的等比数列. 求证任一个不小于ab的正整数，都可以表成A, B中的一些不同的项之和.

证 由第40讲的定理2，当$n\geqslant ab$时，存在非负整数使$ax+by=n$. 将x和y写成二进制数，x的每一项对应着A中的一项$a\cdot 2^r$，y的每一项对应着B的一项$b\cdot 2^s$. 即得证.

例7 N为正整数集. 在N上定义函数f如下：$f(1)=1$, $f(3)=3$，且对$n\in N$有$f(2n)=f(n)$, $f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)$, $f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$. 问：有多少个$n\in N$且$n\leqslant 1988$，使得$f(n)=n$?（第29届IMO，第3题.）

解 把前几个n和$f(n)$的值用二进制数列表如下：

n	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
$f(n)$	1	01	11	001	101	011	111	0001	1001

从表中看出，当$n=(a_la_{l-1}\cdots a_1a_0)_2$时，似乎有$f(n)=(a_0a_1\cdots a_{l-1}a_l)_2$. $f(n)$即是把n的二进制表示倒过来写，不过要注意：必须$a_l=1$.

设$2^l\leqslant n\leqslant 2^{l+1}-1$. 对$l$用归纳法来证实上述的猜测. $l=0,1$时，显然. 设$2^{l+1}\leqslant n\leqslant 2^{l+2}-1$，则$n=(a_{l+1}a_l\cdots a_1a_0)_2$.

1° 如果$a_0=0$，则$f(n)=f((a_{l+1}a_l\cdots a_1)_2)=(a_1\cdots a_{l+1})_2=(a_0a_1\cdots a_{l+1})_2$。

2° 如果$a_0=a_1=1$，则$f(n)=3f((a_{l+1}\cdots a_2a_1)_2)-2f((a_{l+1}\cdots a_2)_2)=3(a_1a_2\cdots a_{l+1})_2-(2a_2\cdots a_{l+1})_2=3\cdot 2^l+3(a_2\cdots a_{l+1})_2-2(a_2\cdots a_{l+1})_2=2^{l+1}+2^l+(a_2\cdots a_{l+1})_2=(a_0a_1\cdots a_{l+1})_2$.

3° 如果$a_0=1$，$a_1=0$，则$f(n)=2f((a_{l+1}\cdots a_2a_0)_2)-f((a_{l+1}\cdots a_2)_2)=2(a_0a_2\cdots a_{l+1})_2-(a_2\cdots a_{l+1})_2=2^{l+1}+2(a_2\cdots a_{+1})_2-(a_2\cdots a_{l+1})_2=(a_0a_1a_2\cdots a_{l+1})_2$.

因此就证明了我们的猜测．由此可知：如果$f((a_l\cdots a_0)_2)=(a_l\cdots a_0)_2$，必$a_{l-k}=a_k(0\leqslant k\leqslant l)$.

由于满足$f(n)=n$的正整数写成二进制时是对称的形式，把这种数称为"对称数".显然一个l位对称数可以由它的末$\left[\frac{l+1}{2}\right]$位来确定．因此在$l$位对称数与$\left[1,2^{\left[\frac{l+1}{2}\right]}\right]$中的奇数之间可建立一一对应关系．因此$l$位对称数的个数为$2^{\left[\frac{l-1}{2}\right]}$．故在$[1,2^l]$中的对称数只有　$D(l)=2^{\left[\frac{l-1}{2}\right]}+2^{\left[\frac{l-2}{2}\right]}+\cdots+1$个.

$l=2k-1$时，$D(l)=2^{k-1}+2(2^{k-2}+\cdots+1)=3\cdot 2^{k-1}-2$.

$l=2k$时，$D(l)=2(2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+1)=2^{k+1}-2$.

现在可以解答前面提出来的问题了，由

$1988=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^2=(11111000100)_2$

可知，$[1,2^{11}]$中的对称数个数减去$[1988,2^{11}]$中的对称数的个数即为所求.

$\because$ $[1,2^{11}]$中的对称数有$3\cdot 2^5-2=94$个，其中大于1988的仅有两个，它们是

$(11111011111)_2$和$(11111111111)_2$.

所以，有92个不超过1988的正整数n，使$f(n)=n$.

第42讲 多项式的基本运算

李 尚 志

以 x 为元的一元多项式具有形式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，其中 a_0，a_1，$\cdots$，a_{n-1}，a_n 是系数．当 $a_n=a_{n-1}=\cdots a_1=a_0=0$ 时 $f(x)$ 为零多项式．当 $a_n\neq0$ 时称 $f(x)$ 为 n 次多项式，记 $\deg f(x)=n$，a_n 称为 $f(x)$ 首项系数．$a_n=1$ 时称 $f(x)$ 为首一多项式．

多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ 与 $g(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0$ 相加减，是将它们的同次项系数相加减，即 $f(x)\pm g(x)=(a_0\pm b_0)+(a_1\pm b_1)x+\cdots$．而它们的乘积 $f(x)g(x)$ 由 $(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)(b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0)$ 去括号和合并同类项得到，即 $f(x)g(x)=c_{n+m}x^{n+m}+c_{n+m-1}x^{n+m-1}+\cdots+c_1x+c_0$，其中 i 次项系数 $c_i=a_0b_i+a_1b_{i-1}+\cdots+a_{i-1}b_1+a_ib_0$．当 $g(x)\neq0$ 时可以用 $f(x)$ 除以 $g(x)$，得到唯一的商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$，使 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，且 $\deg r(x)>\deg g(x)$ 或 $r(x)=0$．当 $r(x)=0$ 时称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记为 $g(x)|f(x)$，并记 $q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$．

一、多项式的相等

两个多项式相等，是指它们的次数相同并且同次项的系数分别都相等．因此，要证明关于多项式的恒等式，可以将等式两边整理后比较同次项系数．反过来，如果已知这个恒等式成立，则可以得到关于同次项系数的等式．

例 1 求 $(1+x)^3+(1+x)^4+(1+x)^5+\cdots+(1+x)^{n+2}$ 展开式里 x^2 的系数．（1963年北京市数学竞赛试题．）

解 $(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{n+2}=\dfrac{(1+x)^3[(1+x)^n-1]}{(1+x)-1}$

$=\dfrac{1}{x}[(1+x)^{n+3}-(1+x)^3]$. 因此，原式里 x^2 的系数即是 $(1+x)^{n+3}-(1+x)^3$ 里 x^3 的系数，为 $C_{n+3}^3-1=\dfrac{n^3+6n^2+11n}{6}$.

上题中如果直接展开原式，x^2 的系数为 $C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{n+2}^2$. 这说明 $C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{n+2}^2=C_{n+3}^3-1$. 一般地，对任意自然数 m 与 n，比较等式 $(1+x)^m+(1+x)^{m+1}+\cdots+(1+x)^{m+n-1}=\dfrac{1}{x}[(1+x)^{m+n}-(1+x)^m]$ 两边 x^m 的系数可得到关于组合数的恒等式

$$C_m^m+C_{m+1}^m+\cdots+C_{m+n-1}^m=C_{m+n}^{m+1}$$

例 2 求所有满足条件 $P(x^2)=(P(x))^2$ 的多项式 $P(x)$.

解 如果 $P(x)$ 为常数 a，则 $a=P(x^2)=(P(x))^2=a^2$, $a=0$ 或 1.

设 $\deg P(x)=n\geqslant 1$, $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，其中 $a_n\neq 0$. 比较 $P(x^2)=a_nx^{2n}+\cdots$ 与 $(P(x))^2=(a_nx^n+\cdots)^2=a_n^2x^{2n}+\cdots$ 的首项系数得 $a_n=a_n^2$，$a_n=1$. 假如 $f_0(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 不为零，设 $\deg f_0(x)=k$，$f_0(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$a_k\neq 0$. 比较 $P(x^2)=x^{2n}+a_kx^{2k}+\cdots$ 与 $(P(x))^2=x^{2n}+2x^n(a_kx^k+\cdots)+(a_kx^k+\cdots)^2=x^{2n}+2a_kx^{n+k}+\cdots$ 的 x^{n+k} 系数得 $2a_k=0$，$a_k=0$，矛盾. 故 $f_0(x)=0$，$P(x)=x^n$.

例 3 将 $\dfrac{1}{x(x-1)(x-2)}$ 表示成 $\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x-2}$ 的形式.

解 将 $\dfrac{1}{x(x-1)(x-2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x-2}$ 两边同乘以 $x(x-1)(x-2)$ 得 $1=A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-1)$. 取 $x=0$ 得 $1=2A$，$A=\frac{1}{2}$. 取 $x=1$ 得 $B=-1$. 取 $x=2$ 得 $C=\frac{1}{2}$.

当多项式 $f(x)=g(x)$ 时，$f(a)=g(a)$ 当然对 x 的一切值 a

成立．当 $f(x)\neq g(x)$ 也可能有某些 a 使 $f(a)=g(a)$，这样的 a 即是方程 $f(x)-g(x)=0$ 的根．不超过 n 次的方程至多有 n 个不同的根，因此有

定理 1（多项式恒等定理） 设多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的次数都不超过 n．如果有 $n+1$ 个不同的值 a 使 $f(a)=g(a)$，则多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等．

例 4 k 为正整数，求多项式 $f(x)$ 使 $f(f(x))=(f(x))^k$．

解 当 $f(x)$ 是常数 a 时取 a 满足 $a=a^k$ 即可．

设 $\deg f(x)=n\geqslant 1$．注意到 $f(\beta)=\beta^k$ 对所有的 $\beta=f(\alpha)$ 成立，只要 β 可取得足够多不同的值就可知 $f(x)=x^k$．对每一个 β 值，使 $f(\alpha)=\beta$ 的 α 值至多 n 个．因此，当 α 取了 nm 个不同的值时至少能得到 m 个不同的 β 值．α 可取得无穷多个不同的值，于是有无穷多个不同的 $\beta=f(\alpha)$ 使 $f(\beta)=\beta^k$．由恒等定理即得 $f(x)=x^k$．

例 5 求所有的多项式 $f(x)$，使它对一切整数 m 取整数值 $f(m)$．

解 对每个自然数 k，定义 $\binom{x}{k}=\dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$．则当整数 $m\geqslant k$ 时 $\binom{m}{k}=C_m^k$ 是整数，当 $0\leqslant m\leqslant k-1$ 时 $\binom{m}{k}=0$，当 $m<0$ 时 $\binom{m}{k}=(-1)^kC^k_{-m+k+1}$ 也是整数．因此，当 A_0，A_1，…，A_n 是整数时 $f(x)=A_0+A_1\binom{x}{1}+A_2\binom{x}{2}+\cdots+A_n\binom{x}{n}$ 对一切整数 m 取整数值 $f(m)$．反过来，对不超过 n 次的多项式 $f(x)$，依次取 $B_0=f(0)$，$B_1=f(1)-B_0$，$B_2=f(2)-B_0-\binom{2}{1}B_1$，…，$B_n=f(n)-B_0-\binom{n}{1}B_1-\binom{n}{2}B_2-\cdots-\binom{n}{n-1}B_{n-1}$，则 $f(k)=B_0+B_1\binom{k}{1}+B_2\binom{k}{2}+\cdots+B_n\binom{k}{n}$ 对 $n+1$ 个值 $k=0$，1，2，…，n 成立，由恒等定理知 $f(x)=B_0+B_1\binom{x}{1}+B_2\binom{x}{2}+\cdots+B_n\binom{x}{n}$．如果当 m 为整数时 $f(m)$ 总为整数，则 $f(0)$，$f(1)$，…，$f(n)$ 都是整数，按前述方式定义的 B_0，B_1，…，B_n 也都是整数．因此，所

有的 $A_0+A_1\binom{x}{1}+A_2\binom{x}{2}+\cdots+A_n\binom{x}{n}$ 恰为所求，其中 n 是任意正整数，A_0，A_1，A_2，…，A_n是任意整数。

多项式的上述表达式 $f(x)=A_0+A_1\binom{x}{1}+A_2\binom{x}{2}+\cdots+A_n\binom{x}{n}$ 对于级数求和十分有用。例如要求 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$，先把通项 $a_n=n^3$（看作 n 的三次多项式）表示成 $n^3=C_n^1+6C_n^2+6C_n^3$ 的形式，由组合数的公式 $C_k^k+C_{k+1}^k+\cdots+C_n^k=C_{n+1}^{k+1}$ 即得 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(C_1^1+C_2^1+\cdots+C_n^1)+6(C_2^2+C_3^2+\cdots+C_n^2)+6(C_3^3+C_4^3+\cdots+C_n^3)=C_{n+1}^2+6C_{n+1}^3+6C_{n+1}^4=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

二、多项式的系数范围

多项式的系数范围，可以取整数集合、有理数集合、实数集合、复数集合等.

如果一个数集 D 对加、减、乘运算封闭（即 D 中任意两数的和、差、积仍在 D 中），就称 D 为数环，如果数集 F 对加、减、乘、除（除数不为0）四则运算封闭，就称 F 为数域. 前面所说的四个数集都是数环，后三个数集是数域 .

我们注意到，两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和、差、积的系数是由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的系数经加、减、乘运算得到的. 因此，如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的系数在数环 D 中，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$ 的系数也在 D 中. 用 $g(x)$ 对 $f(x)$ 作带余除法时，商式 $q(x)$ 与余式 $r(x)$ 的系数由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的系数经加、减、乘、除得到，当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的系数在数域 F 中时 $q(x)$ 与 $r(x)$ 的系数也在 F 中. 但我们又注意到，作带余除法时，对系数作的每次除法都以除式的首项系数为除数. 当除式是首一多项式时，对系数就只作了加、减、乘运算，只要 D 是数环（不必是数域），就可保证当被除式与除式系数在 D 中时商与余式的系数也在 D 中.

例6 设 a,b 是实数 $b\neq 0$，$a+bi$ 且是实系数方程 $f(x)=0$ 的根，则 $a-bi$ 也是 $f(x)=0$ 的根.

证 $f(a+bx)$被x^2+1除的商$q(x)$与余式$c+dx$仍是实系数多项式. 将$x=i$代入等式$f(a+bx)=q(x)(x^2+1)+c+dx$两边得$c+di=0$, $d=c=0$. 于是$f(a+bx)=q(x)(x^2+1)$, 将$x=-i$代入即得$f(a-bi)=0$.

例 7 (1) 若a, b, c是有理数, 且$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$, 则$a=b=c=0$.

(2) 若$\sqrt[3]{2}$是有理系数方程$f(x)=0$的根, 则$\sqrt[3]{2}\omega$与$\sqrt[3]{2}\omega^2$也是$f(x)=0$的根, 其中$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

证 (1) 当$c=0$时易见$b=0$, $a=0$. 设$c\neq 0$, 则$\sqrt[3]{2}$是有理系数方程$a+bx+cx^2=0$的根, 同时当然也是$x^3-2=0$的根。用x^3-2除以$a+bx+cx^2$得到的商式$q(x)$及余式$dx+e$都是有理系数多项式. 将$x=\sqrt[3]{2}$代入等式$x^3-2=q(x)(a+bx+cx^2)+dx+e$两边得$d\sqrt[3]{2}+e=0$, 于是$d=0$(否则$\sqrt[3]{2}=-\dfrac{e}{d}$为有理数), $e=0$, $x^3-2=q(x)(a+bx+cx^2)$. 有理系数一次方程$q(x)=0$有有理根α, $\alpha^3-2=q(\alpha)(a+b\alpha+c\alpha^2)=0$, 矛盾. 这说明不可能$c\neq 0$, 只能$c=0$从而$a=b=0$.

(2) $f(x)$除以x^3-2得到的商式$q(x)$和余式$a+bx+cx^2$是有理系数多项式. 将$x=\sqrt[3]{2}$代入$f(x)=q(x)(x^3-2)+a+bx+cx^2$得$a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$, 于是由(1)知$a=b=c=0$, $f(x)=q(x)(x^3-2)$, $x^3-2=0$的三个根$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}\omega$, $\sqrt[3]{2}\omega^2$都是$f(x)=0$的根.

例 8 a取什么整数值时, x^2-x+a整除$x^{13}+x+90$.

证 由于$f(x)=x^{13}+x+90$与$g(x)=x^2-x+a$是整系数多项式且$g(x)$的首项系数为1, 故$f(x)$除以$g(x)$的商式$q(x)$也为整系数, 当x取整数值x_0时$g(x_0)\mid f(x_0)$. 取$x=0,1$得$a\mid 90$且$a\mid 92$, 于是$a\mid 2=92-90$, $a=\pm 1, \pm 2$. 取$x=-1$得$(2+a)\mid 88$,

$a\neq1$且$a\neq-2$．取$x=-2$得$(6+a)|8104$，$a\neq-1$．直接计算可知$(x^2-x+2)|(x^{10}+x+90)$，于是$a=2$是唯一解．

三、余数定理与因式定理

定理 2（余数定理） 多项式$f(x)$除以$x-a$的余数等于$f(a)$．

证 设商为$q(x)$，余数为r，在等式$f(x)=q(x)(x-a)+r$两边取$x=a$即得$r=f(a)$．

由余数定理立即得

定理 3（因式定理） 多项式$f(x)$被$x-a$整除的充分必要条件是$f(a)=0$．

推论 $f(x)-f(a)$被$x-a$整除．

例 9 证明多项式$f(x)=(\cos\theta+x\sin\theta)^n-\cos n\theta-x\sin n\theta$被$x^2+1$整除．

证 注意$x^2+1=(x+i)(x-i)$．由$f(\pm i)=(\cos\theta\pm i\sin\theta)^n-(\cos n\theta\pm i\sin n\theta)=0$知$f(x)$被$x-i$与$x+i$整除，从而被$(x-i)(x+i)=x^2+1$整除．

例 10 求证$f(x)=x^{4a}+x^{4b+1}+x^{4c+2}+x^{4d+3}$被$x^3+x^2+x+1$整除，其中$a,b,c,d$是正整数．

证 注意$g(x)=x^3+x^2+x+1=(x+1)(x+i)(x-i)$．易见$f(-1)=f(\pm i)=0$，再用因式定理即得．

例 11 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$，求$f(x^5)$除以$f(x)$的余式．

解 注意$f(x)|(x^5-1)$，先用$f(x^5)$除以x^5-1．令$y=x^5$，则$f(y)$除以$y-1$的余式为$f(1)=5$，$f(y)=q(y)(y-1)+5$，$f(x^5)=q(x^5)(x-1)f(x)+5$，所求余式为5．

例 12 $F(x)$是整系数多项式，且有四个不同整数a,b,c,d使$F(a)=F(b)=F(c)=F(d)=5$．证明不存在整数k使$F(k)=8$．

证 取$G(x)=F(x)-5$，则由$G(a)=G(b)=G(c)=G(d)$

$=0$ 知 $G(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)H(x)$，$H(x)$为整系数多项式．对任意整数 k，$k-a$，$k-b$，$k-c$，$k-d$ 为四个不同的整数，其乘积的绝对值等于 0 或大于 3．$G(k)\neq 3$，$F(k)\neq 8$．

例 13 设 a，b，c 为不同整数，求证：不存在整系数多项式 $P(x)$ 使 $P(a)=b$，$P(b)=c$ 且 $P(c)=a$．

证 设存在这样的 $P(x)$．我们有 $(x-a)|(P(x)-P(a))$，$P(x)-P(a)=(x-a)Q(x)$，且 $Q(x)$ 为整系数多项式．将 $x=b$ 代入得$(b-a)|(P(b)-P(a))=c-b$．同理，$(c-b)|(P(c)-P(b))=a-c, a-c|b-a$．由 $(b-a)|(c-b)|(a-c)|(b-a)$ 知 $|b-a|=|c-b|=|a-c|\neq 0$．但由 $(b-a)+(c-b)=c-a$ 知 $|a-c|=|b-a|+|c-b|>|b-a|$ 或 $|a-c|=|b-a|-|c-b|<|b-a|$，矛盾．

例 14 解方程 $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3$．

解 原方程即 $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-(x+y+z)^3=0$．我们可以将 $f(x,y,z)$看作 x 的一元多项式 $F(x)$，其"系数"范围是 y，z 的整系数多项式．这个"系数"范围对加、减、乘运算封闭，因式定理仍成立．当 x 取"值" $-y$ 时 $F(-y)=f(-y,y,z)=0$，故 $(x+y)|f(x, y, z)$．将 x，y，z 的位置作任意置换时 $f(x, y, z)$仍不变，而因子 $x+y$ 变成因子 $x+z$，$y+z$．于是 $f(x,y,z)=\lambda(x+y)(x+z)(y+z)$，比较两边的次数可知 λ 为常数（取 $x=y=z=1$ 可求得 $\lambda=\dfrac{f(1,1,1)}{2^3}=-3$） 于是原方程为 $\lambda(x+y)(x+z)(y+z)=0$，全部解为满足条件 $x=-y$ 或 $x=-z$ 或 $y=-z$ 的任意数组(x,y,z)．

四、插值公式

例 15 多项式 $f(x)$被 $x-a$ 除余 A，被 $x-b$ 除余 $B, a\neq b$，求 $f(x)$被$(x-a)(x-b)$除的余式．

解 取 $R(x)=\frac{A(x-b)}{a-b}+\frac{B(x-a)}{b-a}$，则 $R(a)=A=f(a)$，$R(b)=B=f(b)$．于是 $G(x)=f(x)-R(x)$ 当 $x=a,b$ 时取值都是0．由因式定理知 $G(x)$ 被 $(x-a)(x-b)$ 整除．由 $f(x)=G(x)+R(x)$ 及 $\deg R(x)<2$ 或 $R(x)=0$ 知 $R(x)$ 为所求余式．

一般地，设 a_1，a_2，$\cdots a_n$ 是不同的数，则对任意 n 个数 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，取 $\varphi_i(x)=\frac{(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，并取 $R(x)=A_1\varphi_1(x)+A_2\varphi_2(x)+\cdots+A_n\varphi_n(x)$，可使 $R(a_i)=A_i$ 对 $1\leqslant i\leqslant n$ 成立　且对任意多项式 $f(x)$，所有的 $f(a_i)=A_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 的充分必要条件是：$f(x)$ 除以 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ 的余式为 $R(x)$　$R(x)$ 的上述表达式称为拉格朗日插值公式．

例 16　求 $x^{81}+x^{49}+x^{25}+x^9+x$ 除以 x^3-x 的余式．

解法一 $x^3-x=x(x-1)(x+1)$　$f(x)=x^{81}+x^{49}+x^{25}+x^9+x$ 除以 $x,x-1,x+1$ 的余数分别是 $f(0)=0,f(1)=5$ 和 $f(-1)=-5$．于是所求余式 $R(x)=\frac{5x(x+1)}{1\times2}+\frac{-5x(x-1)}{(-1)(-2)}=5x$．

解法二 $x^{81}+x^{49}+x^{25}+x^9+x=x(x^{80}-1)+x(x^{48}-1)+x(x^{24}-1)+x(x^8-1)+5x$，$(x^2-1)\mid(x^{2m}-1)$，$(x^3-x)\mid x(x^{2m}-1)$，故所求余式为 $5x$．

习　题　42

1．利用等式 $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$ 求和 $1^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2$．

2．确定所有的多项式 $P(x)$ 使 $P(x^2+1)=(P(x))^2+1,P(0)=0$．

3．a,b 是有理数且 $b\neq0$，$a+b\sqrt{2}$ 是有理系数多项式 $f(x)$ 的根，求证 $a-b\sqrt{2}$ 也是 $f(x)$ 的根．

4．$f(x)=x^2+ax+b$，证明 $|f(1)|,|f(2)|,|f(3)|$ 中至少有一个 $\geqslant\frac{1}{2}$．

5. 已知对于某个自然数$n\geqslant2$，多项式$u_i(x)=a_ix+b_i(a_i,b_i$是实数，$i=1,2,3)$满足关系式$u_1(x)^n+u_2(x)^n=u_3(x)^n$.证明：这些多项式可以表示成$u_i(x)=C_i(Ax+B)$，$i=1,2,3$，并且$A,B,C_1,C_2,C_3$是某些实数.（1971-1972年波兰数学竞赛试题.）

6. 设$P(x)$是整系数多项式，且对四个不同整数x_1,x_2,x_3,x_4有$P(x_i)=2$，$1\leqslant i\leqslant4$.求证：对于任何整数x，$P(x)$不能等于1,3,5,7,9中的任何一个.（1963年北京数学竞赛试题.）

7. 证明：如果实数a，b，c满足关系式$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，则对任何奇数$n$，$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}$.（1955-1956年波兰数学竞赛试题.）

8. $P(x)$是整系数多项式，$P(2),P(3)$都是6的倍数，求证$P(5)$也是6的倍数.

9. a_1，…，a_n是n个不同的整数.求证$P(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$不能分解为整系数多项式之积.

10. (1) 求证：不存在整系数多项式$P(x)$，使$P(16)=25$且$P(25)=49$。
(2) 整系数多项式$P(x)$能否同时满足$P(10)=10$，$P(20)=20$和$P(30)=40$？

11. 求$x^{10}+1$除以$(x^2+1)(x^4-4)$的余式。

12. 已知$x+\frac{1}{x}=a,a$是已知数，求$x^{13}+\frac{1}{x^{13}}$.（1953-1954年波兰数学竞赛试题.）

第43讲 多项式的唯一分解

李 尚 志

一、复数范围内的唯一分解

由代数基本定理，复系数 n 次多项式（$n\geqslant1$）$f(x)$ 至少有一个复数根 α_1（注意，我们把方程 $f(x)=0$ 的根也称为多项式的根） 由因式定理，$f(x)$被 $x-\alpha_1$ 整除，$f(x)=(x-\alpha_1)f_1(x)$，$f_1(x)$是 $n-1$ 次多项式．当 $n-1\geqslant1$ 时对 $f_1(x)$ 又可作同样的讨论。照此下去，最后可得 $f(x)=A(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$，其中 A 是 $f(x)$的首项系数．或进一步写成 $f(x)=A(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_s)^{m_s}$ 的形式使 α_1，$\alpha_2\cdots$，α_s 互不相同．$f(\alpha)=A(\alpha-\alpha_1)^{m_1}(\alpha-\alpha_2)^{m_2}\cdots(\alpha-\alpha_s)^{m_s}=0$ 的充分必要条件是 α 等于某个 α_i，因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 就是 $f(x)$的全部的不同的复数根．每个 m_i 称为根 α_i 的重数，它也就是使$(x-\alpha_i)^m$ 整除 $f(x)$的最大整数 m．根 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 及其重数 $m_1,\cdots,m_s$ 都由 $f(x)$唯一决定。这就证明了

定理 1（复数范围内的唯一分解定理） 如果不考虑因子的顺序，则每个非常数多项式 $f(x)$ 在复数范围内可以唯一地分解为 $A(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_s)^{m_s}$ 的形式．

推论 n 次多项式至多有 n 个不同的根．

例 1 令 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$，求证：

（1）$x^n-1=(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^{n-1})$．

（2）$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=0$．

（3）$(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1})=n$．

(4) $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$.

证 (1) 方程 $x^n-1=0$(即 $x^n=1$)的 n 个复数根为 $\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=\omega^k$，$0\leqslant k\leqslant n-1$，于是 x^n-1 的唯一分解式为 $x^n-1=(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^{n-1})$.

(2) 由 $\omega^n=1$ 及 $\omega\neq1$ 知 $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=\frac{\omega^n-1}{\omega-1}=0$.

(3) 由 $x^n-1=(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})$ 知：方程 $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=0$ 的解为 $x^n=1$ 且 $x\neq1$，即 $\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$. 于是 $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^{n-1})$，取 $x=1$ 即得.

(4) 在(3)的等式两边取绝对值得 $|1-\omega||1-\omega^2|\cdots|1-\omega^{n-1}|=n$. 但对 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 有 $|1-\omega^k|=\left|\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right|=\sqrt{\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2+\left(\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2}=\sqrt{2-2\cos\frac{2k\pi}{n}}=\sqrt{4\sin^2\frac{k\pi}{n}}=2\sin\frac{k\pi}{n}$，于是得 $2^n\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=n$，两边同除以 2^n 即得.

二、实数范围内的分解

如果实系数多项式 $f(x)$ 有虚根 $\alpha_1+\beta_1 i$ (其中 α_1,β_1 为实数且 $\beta_1\neq0$)，则还有虚根 $\alpha_1-\beta_1 i$，$f(x)=[x-(\alpha_1+\beta_1 i)][x-(\alpha_1-\beta_1 i)]f_1(x)=[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]f_1(x)$，$(x-\alpha_1)^2+\beta_1$ 是实系数多项式，从而 $f_1(x)$ 也是实系数多项式. 对 $f_1(x)$ 又可作同样的讨论. 照此下去可得 $f(x)=[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^{m_1}\cdots[(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2]^{m_s}H(x)$，其中 $H(x)$ 的复数根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_t$ 全是实数，$H(x)=A(x-\lambda_1)^{r_1}\cdots(x-\lambda_t)^{r_t}$，于是得

定理 2(实数范围内的唯一分解定理) 实系数多项式$f(x)$在实数范围内可以唯一地分解为$A[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^{m_1}\cdots[(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2]^{m_s}(x-\lambda_1)^{r_1}\cdots(x-\lambda_t)^{r_t}$，其中$\alpha_1\pm\beta_1 i,\cdots,\alpha_s\pm\beta_s i$与$\lambda_1,\cdots,\lambda_t$分别是$f(x)$的全部不同的虚根和实根，$m_1,\cdots,m_s$，$r_1,\cdots,r_t$是它们的重数.

例 2 在实数范围内分解$x^4+x^3+x^2+x+1$.

解法一 令$\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，$x^4+x^3+x^2+x+1=[(x-\omega)(x-\omega^4)][(x-\omega^2)(x-\omega^3)]=\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{5}+1\right)\cdot\left(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{5}+1\right)$.

解法二 $x^4+x^3+x^2+x+1=x^2\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1\right]=x^2\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1\right]=x^2\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]=\left(x^2-\frac{\sqrt{5}-1}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{\sqrt{5}+1}{2}x+1\right)$.

上题解法一适用于知道全部复数根的情形. 解法二适用于形如$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$的多项式. 比较两种解法的答案可顺便得出$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-\sqrt{5}-1}{4}$.

例 3 $P(x)$是实系数首一多项式，次数$\geqslant 1$，且无实根. 求证$P(x)$可写成两个实系数多项式的平方和.

证 $P(x)=[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^{m_1}\cdots[(x-\alpha_s)^2+\beta_s^2]^{m_s}$. 设$[(x-\alpha_1)+\beta_1 i]^{m_1}\cdots[(x-\alpha_s)+\beta_s i]^{m_s}=Q_1(x)+Q_2(x)i$，$Q_1(x)$与$Q_2(x)$是实系数多项式. 则$[(x-\alpha_1)-\beta_1 i]^{m_1}\cdots[(x-\alpha_s)-\beta_s i]^{m_s}=Q_1(x)-Q_2(x)i$，$P(x)=[Q_1(x)+Q_2(x)i][Q_1(x)-Q_2(x)i]=[Q_1(x)]^2+[Q_2(x)]^2$.

在上题中，$P(x)$是平方和之积，我们实际上是证明了：任

意个平方和之积仍是平方和．对两个平方和之积，用我们的方法可得$(f_1^2+f_2^2)\cdot(g_1^2+g_2^2)=[(f_1+f_2i)(g_1+g_2i)][(f_1-f_2i)(g_1-g_2i)]=[(f_1g_1-f_2g_2)+(f_1g_2+f_2g_1)i]\cdot[(f_1g_1-f_2g_2)-(f_1g_2+f_2g_1)i]=(f_1g_1-f_2g_2)^2+(f_1g_2+f_2g_1)^2$.

三、有理系数与整系数多项式

例 4 两个整系数多项式$f(x)$与$g(x)$的乘积是偶系数多项式，求证：$f(x)$与$g(x)$中必有一个是偶系数多项式．

证 如果$f(x)$与$g(x)$都含有奇系数，则将它们的奇系数全换成1、偶系数全换成0之后得到两个非零多项式$f_1(x)$与$g_1(x)$，$f(x)=f_1(x)+2F(x)$，$g(x)=g_1(x)+2G(x)$，$F(x)$与$G(x)$是整系数的多项式．$f(x)g(x)=f_1(x)g_1(x)+2H(x)$，$H(x)$为整系数多项式．$f_1(x)g_1(x)$首项（设为$m$次项）系数为1，$f(x)g(x)$的$m$次项系数为奇数，矛盾。

例 4 是下面的定理的特例．定理中所说的本原多项式，是指各项系数互素的整系数多项式，对整系数多项式$f(x)$，$f_1(x)$及整数c，我们将用$f(x)\equiv f_1(x)\pmod{c}$来表示$c$整除$f(x)-f_1(x)$的所有的系数．注意当$f(x)\equiv f_1(x)\pmod{c}$且$g(x)\equiv g_1(x)\pmod{c}$时有$f(x)\pm g(x)\equiv f_1(x)\pm g_1(x)\pmod{c}$及$f(x)g(x)\equiv f_1(x)g_1(x)\pmod{c}$.

定理 3 **（高斯引理）** 本原多项式$f(x)$与$g(x)$的乘积仍是本原多项式．

证 假如$f(x)g(x)$的各项系数有最大公约数$d>1$，d有素因子p，则$f(x)g(x)\equiv 0\pmod{p}$，但$f(x)\not\equiv 0\pmod{p}$且$g(x)\not\equiv 0\pmod{p}$．将$f(x)$与$g(x)$的系数中p的倍数全换成0，得到非零多项式$f_1(x)$与$g_1(x)$，$f(x)g(x)\equiv f_1(x)g_1(x)\pmod{p}$．$f_1(x)$与$g_1(x)$的首项系数$a$与$b$都不被$p$整除，故$f_1(x)g_1(x)$的首项系数$ab$也不被$p$整除，$f_1(x)g_1(x)\not\equiv 0\pmod{p}$，故$f(x)g(x)\not\equiv 0\pmod{p}$，矛盾．

定理 4（高斯引理） 如果整系数多项式 $P(x)$ 能分解为两个有理系数多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 之积，则存在有理数 λ 使 $P(x)$ 是整系数多项式 $\lambda f(x)$ 与 $\lambda^{-1}g(x)$ 之积.

证 可选自然数 a，b，c，d 使 $F(x)=\frac{b}{a}f(x)$ 与 $G(x)=\frac{d}{c}g(x)$ 都是整系数本原多项式，从而 $F(x)G(x)$ 是本原多项式. $P(x)=\frac{ac}{bd}F(x)G(x)=\frac{s}{t}F(x)G(x)$，其中 $\frac{s}{t}$ 是既约分数. 由 $P(x)$ 是整系数多项式知 t 整除 $F(x)G(x)$ 的各项系数，因而 $t=1$，$P(x)$ 分解为整系数多项式 $sF(x)$ 与 $G(x)$ 的乘积，$sF(x)=\lambda f(x)$，$G(x)=\lambda^{-1}g(x)$，其中 $\lambda=\frac{sb}{a}$.

例 5 求有理数 k，使 $\cos k\pi$ 也是有理数.

解 记 $\omega=\cos k\pi+i\sin k\pi$. 设 $k=\frac{m}{n}$（m，n 为整数且 $n>0$）. 则 $\omega^{2n}=\cos 2m\pi+i\sin 2m\pi=1$，$\omega$ 是 $x^{2n}-1$ 的根，$x^{2n}-1$ 被有理系数多项式 $(x-\omega)(x-\overline{\omega})=x^2-2x\cos k\pi+1$ 整除，因而被某个整系数多项式 $c(x^2-2x\cos k\pi+1)$ 在整系数范围内整除. 只能 $c=\pm1$，$2\cos k\pi$ 为整数，再由 $|\cos k\pi|\leqslant1$ 知 $\cos k\pi=0$，$\pm\frac{1}{2}$ 或 ±1，$k=\frac{t}{2}$ 或 $\frac{t}{3}$（t 为整数）.

如果多项式 $P(x)$ 在取定的系数范围内不能分解为两个至少一次的因子之积，就称 $P(x)$ 在这个范围内不可约.

例 6 证明 $P(x)=x^5-3x^4+6x^3-3x^2+9x-6$ 在整数范围内不可约.（1962-1963年波兰数学竞赛试题.）

证 注意 $P(x)\equiv x^5\pmod 3$. 设在整数范围内有分解式 $P(x)=f(x)g(x)$ 使 $\deg f(x)=m\geqslant1$ 和 $\deg g(x)=k\geqslant1$. 将 $f(x)$ 与 $g(x)$ 系数中 3 的倍数全换成0得到 $f_1(x)$ 与 $g_1(x)$，则 $f_1(x)g_1(x)\equiv f(x)g(x)\equiv x^5\pmod 3$. $f_1(x)$ 与 $g_1(x)$ 的最低次非零系数 a

与 b 都不被3整除，因而 $f_1(x)g_1(x)$ 的最低次非零系数 ab 不被3整除、只能是 x^6 的系数. 可见 $f_1(x)g_1(x)=abx^5$，$f_1(x)=ax^m$，$g_1(x)=bx^k$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的常数项都被3整除，$P(x)=f(x)g(x)$ 的常数项 -6 应被9整除，但事实上 $9\nmid -6$，矛盾.

定理 5（爱森斯坦判别法） 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+ax+a_0$ 是整系数多项式. 如果存在素数 p 使 $p\nmid a_n$，但 $p|a_i$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$，且 $p^2\nmid a_0$，则 $f(x)$ 在有理数范围内不可约.

证 用例8的方法（用 p 代替3）可证 $f(x)$ 在整数范围内不可约，再由定理5知它在有理数范围内也不可约.

例 7 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 在有理数范围内不可约.

证法一 设在有理数范围内有分解 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1=f_1(x)f_2(x)$. 令 $y=x-1$，则 $f(y+1)=f_1(y+1)f_2(y+1)$. 但由 $f(x)=\dfrac{x^5-1}{x-1}$ 知 $f(y+1)=\dfrac{(y+1)^5-1}{(y+1)-1}=y^4+5y^3+10y^2+10y+5$，由定理5（取 $p=5$）知 $f(y+1)$ 不可约，矛盾.

证法二 将有理数分解式 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1=f_1(x)f_2(x)$ 右边的因子再分解可得实分解式 $f(x)=\left(x^2-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}x+1\right)\left(x^2+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}x+1\right)$. $f_1(x)$ 不可能等于 $x^2-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}x+1$ 与 $x^2+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}x+1$ 这两个实不可约因子的任何一个（因为这两个因子都含有无理系数），当 $\deg f_1(x)\geqslant1$ 时 $f_1(x)$ 只能等于这两个因子的乘积 $f(x)$，于是 $f_2(x)=1$. 这就证明了 $f(x)$ 在有理数范围内的不可约性.

下面的例题可进一步说明整数的同余概念的应用. 我们要用到同余式 $(x+y)^{2^m}\equiv x^{2^m}+y^{2^m}\pmod 2$，$m$ 为任意正整数. 这个同余式可通过对 m 作数学归纳法来证明：当 $m=1$ 时，$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2\equiv x^2+y^2\pmod 2$；设 $(x+y)^{2^{m-1}}\equiv x^{2^{m-1}}+y^{2^{m-1}}$

(mod 2)，则 $(x+y)^{2^m}=[(x+y)^{2^{m-1}}]^2\equiv(x^{2^{m-1}}+y^{2^{m-1}})^2\equiv x^{2^m}+y^{2^m}$ (mod 2)．事实上，对任意素数 p 可同样证明 $(x+y)^{p^m}\equiv x^{p^m}+y^{p^m}$ (mod p)．

例 8 求 $(x+1)^n$ 展开式中奇系数的个数．

解 我们只关心系数的奇偶性，显然可以考虑模 2 的同余式．将 n 按二进制展开成 $n=2^{r_1}+2^{r_2}+\cdots+2^{r_k}$，其中 $r_1>r_2>\cdots>r_k\geqslant 0$，则 $(x+1)^n=(x+1)^{2^{r_1}}(x+1)^{2^{r_2}}\cdots(x+1)^{2^{r_k}}\equiv(x^{2^{r_1}}+1)(x^{2^{r_2}}+1)\cdots(x^{2^{r_k}}+1)$(mod 2)． $f_1(x)=(x^{2^{r_1}}+1)(x^{2^{r_2}}+1)\cdots(x^{2^{r_k}}+1)$ 是 k 个二项式的乘积，展开后共有 2^k 项，每项由 $x^{2^{r_1}}$，$x^{2^{r_2}}$，$\cdots$，$x^{2^{r_k}}$ 中取出若干个来相乘得到，具有形式 $x^{i_12^{r_1}+i_22^{r_2}+\cdots+i_k2^{r_k}}$，其中 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 取值为1或0．注意 $i=i_12^{r_1}+i_22^{r_2}+\cdots+i_k2^{r_k}$ 恰是整数 i 的二进制展开式，当 k 数组 $(i_1,i_2,\cdots,i_k)$ 取值不同时得到的 i 也不同．这说明 $f_1(x)$ 展开式中的 2^k 项中没有同类项，这些项的系数都是1．$f_1(x)$ 展开式中奇系数有 2^k 个，$(x+1)^n$ 展开式中奇系数也是 2^k 个，k 为 n 的二进制展开中1的个数．

例 9 $0\leqslant k\leqslant 2^n-1$，证明组合数 $C_{2^n-1}^k$ 是奇数．

证 需要证明的是 $(x+1)^{2^n-1}$ 的展开式里各项系数全为奇数．这是例 8 的特殊情况．$2^n-1=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2+1$，于是 $(x+1)^{2^n-1}\equiv(x^{2^{n-1}}+1)(x^{2^{n-2}}+1)\cdots(x^2+1)(x+1)$ (mod 2)．而 $f_1(x)=(x^{2^{n-1}}+1)(x^{2^{n-2}}+1)\cdots(x^2+1)(x+1)=$
$$\frac{(x^{2^{n-1}}+1)\cdots(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1}=\frac{x^{2^n}-1}{x-1}=x^{2^n-1}+\cdots+x^2$$
$+x+1$ 的系数全为1，于是 $(x+1)^{2^n-1}$ 的展开系数 $C_{2^n-1}^k$ 全是奇数，$0\leqslant k\leqslant 2^n-1$．

五、一些技巧

1．双二次三项式的配方

我们都熟悉 $x^4+bx^2+c=\left(x^2+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}$．但有时需用到

$x^4+bx^2+c^2=(x^4\pm 2cx^2+c^2)-(\pm 2c-b)x^2=(x^2\pm c)^2-(\pm 2c-b)x^2$.

例 10 对整数 n 证明 n^4-20n^2+4 为合数.

证 $n^4-20n^2+4=(n^2-2)^2-16n^2=(n^2-2+4n)(n^2-2-4n)$，且两个因子 $n^2-2\pm 4n=(n\pm 2)^2-6\neq \pm 1$.

例 11 证明有无穷多个自然数 a，使得对任意自然数 n，数 n^4+a 都不是素数.

证 对每个大于 1 的整数 m 取 $a=4m^4$，则 $n^4+a=(n^2+2m^2)^2-4m^2n^2=(n^2+2m^2+2mn)(n^2+2m^2-2mn)$，且 $n^2+2m^2\pm 2mn=(n\pm m)^2+m^2\geqslant 4$，$n^4+a$ 总为合数.

2. $1+x^m+x^{2m}+\cdots+x^{(n-1)m}$ 的有理分解

利用等式 $1+x^m+x^{2m}+\cdots+x^{(n-1)m}=\dfrac{x^{nm}-1}{x^m-1}$，将 $x^{nm}-1$ 与 x^m-1 作适当分解后再约分.

例 12 在有理数范围内分解 $x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$.（1978 年全国中学数学竞赛试题.）

解 原式 $=\dfrac{x^{15}-1}{x^3-1}=\dfrac{x^5-1}{x-1}\cdot\dfrac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1}=(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$.

例 13 对什么 n，多项式 $1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2}$ 被 $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$ 整除.

解 要求 n 使 $Q(x)=\dfrac{1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2}}{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}$ 为整式. 但 $Q(x)=\dfrac{x^{2n}-1}{x^2-1}\Big/\dfrac{x^n-1}{x-1}=\dfrac{x^{2n}-1}{x^n-1}\cdot\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{x^n+1}{x+1}$. 由因式定理，$Q(x)$ 为整式(即 $(x+1)\mid(x^n+1)$)的充分必要条件为 $(-1)^n+1=0$，即 n 为奇数.

3. $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ 的性质 $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=0$

的应用

例 14 求 $\cos5°+\cos77°+\cos149°+\cos221°+\cos293°$.

解 记 $\cos5°+i\sin5°=\alpha$. $\cos72°+i\sin72°=\omega$，则所求的数为复数 $A=\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\alpha\omega^3+\alpha\omega^4$ 的实部. 但 $A=\alpha(1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4)=\alpha\cdot\dfrac{\omega^5-1}{\omega-1}=0$，故所求的数为0.

例 15 设 $P(x),Q(x),R(x)$ 均为 x 的多项式，且满足 $P(x^3)+xQ(x^3)=(x^2+x+1)R(x)$. 证明 1 是这三个多项式的公共根.

证 取 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$，则 $\omega^3=1,\omega^2+\omega+1=0$. 将 $x=\omega$，ω^2 分别代入 $P(x^3)+xQ(x^3)=(x^2+x+1)R(x)$ 得 $P(1)+\omega Q(1)=0$，$P(1)+\omega^2Q(1)=0$，两式相减得 $(\omega-\omega^2)Q(1)=0$. $Q(1)=0$，$P(1)=-\omega Q(1)=0$. 再将 $x=1$ 代入 $P(x^3)+xQ(x^3)=(x^2+x+1)R(x)$ 得 $3R(1)=P(1)+Q(1)=0$，$R(1)=0$.

习 题 43

1. 将 x^8+x^4+1 分解为不可约因式之积：(1) 在有理数域上；(2) 在实数域上；(3) 在复数域上.
2. 求证：对任意复系数多项式 $f(x)$，存在多项式 $g(x)$，使 $f(x)|g(x^{100})$.
3. 求证：x^4-10x^2+1 在有理数范围内不可约.
4. a，b，n 为整数，求证：存在整数 x，y，使 $(a^2+b^2)^n=x^2+y^2$.
5. 多项式 x^3+bx^2+cx+d 的系数都是整数，并且 $bd+cd$ 是奇数. 证明：这多项式不能分解为两个整系数多项式的乘积.（1963 年北京数学竞赛试题.）
6. 证明 x^4+2x^2+2x+2 在整数范围内不能再分解.（1922-1923 年匈牙利数学竞赛试题.）
7. a，b 为连续整数，求证：$a^2+b^2+(ab)^2$ 是完全平方数.
8. 求证：x 取任何自然数时，多项式 $4x^3+6x^2+4x+1$ 的值总是合数.
9. 求证：$x^9+x^8+\cdots+x+1$ 整除 $x^{9999}+x^{8888}+\cdots+1$.

10. n 是大于 1 的自然数，求证 $\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{n}=0$。(1957-1958年波兰数学竞赛试题．)

11. 求证 $\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$.(第五届国际数学竞赛试题.)更一般地，对自然数 m，求证 $\cos\frac{\pi}{2m+1}-\cos\frac{2\pi}{2m+1}+\cos\frac{3\pi}{2m+1}+\cdots+(-1)^{m-1}\cos\frac{m\pi}{2m+1}=\frac{1}{2}$.

12. 设 $P(x),Q(x),R(x)$及$S(x)$皆为多项式，且满足 $P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x)$，求证：$x-1$ 是 $P(x)$ 的因子．(第五届美国数学竞赛试题．)

第44讲　多项式的公因式

李尚志

如果两个多项式$f(x)$与$g(x)$同时被多项式$d(x)$整除，就称$d(x)$为$f(x)$与$g(x)$的公因式.如果$D(x)$是$f(x)$与$g(x)$的公因式,并且$f(x)$与$g(x)$的所有的公因式都整除$D(x)$,则$D(x)$称为$f(x)$与$g(x)$的最高公因式,如果$D_1(x)$与$D_2(x)$都是$f(x)$与$g(x)$的最高公因式，则$D_1(x)$整除$D_2(x)$，$D_2(x)$也整除$D_1(x)$，于是$D_2(x)=\lambda D_1(x)$,λ是某个非零常数.如果我们还要求最高公因式的首项系数为1,则$f(x)$与$g(x)$的最高公因式是唯一的，记作$(f(x),g(x))$.当$(f(x),g(x))=1$时称$f(x)$与$g(x)$互素.

一、公共根与公因式

如果知道了$f(x)$与$g(x)$在复数范围内的分解式$f(x)=A(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_s)^{m_s}$，$g(x)=B(x-\beta_1)^{n_1}\cdots(x-\beta_t)^{n_t}$，则$d(x)=(x-\gamma_1)^{k_1}\cdots(x-\gamma_r)^{k_r}$为$f(x)$与$g(x)$的公因式的充分必要条件是：$d(x)$的根$\gamma_1$，…，$\gamma_r$都是$f(x)$与$g(x)$的公共根，并且每个根$\gamma_i$在$d(x)$中的重数$k_i$不超过它分别在$f(x)$，$g(x)$中的重数.如果$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的最高公因式，则$\gamma_1$，…，$\gamma_r$是$f(x)$与$g(x)$的全部公共根,而每个根$\gamma_i$在$d(x)$中的重数是$\gamma_i$在$f(x)$中与$g(x)$中的两个重数中较小的一个.

例1　求x^n-1与x^m-1的最高公因式.

解法一　先求最高公因式$d(x)=(x^n-1,x^m-1)$的根，即求x^n-1与x^m-1的公共根.

设$d=(n,m)$是n与m的最大公约数.则x^d-1的每个根α满足$\alpha^d=1$从而$\alpha^n=(\alpha^d)^{\frac{n}{d}}=1^{\frac{n}{d}}=1$且$\alpha^m=(\alpha^d)^{\frac{m}{d}}=1$,$\alpha$是

x^n-1 与 x^m-1 的公共根．反过来，设 α 是 x^n-1 与 x^m-1 的公共根，则 $\alpha^n=\alpha^m=1$．由整数的性质知存在整数 s 与 t 使 $sn+tm=d$，于是 $\alpha^d=\alpha^{sn+tm}=(\alpha^n)^s(\alpha^m)^t=1^s\cdot 1^t=1$，$\alpha$ 是 x^d-1 的根．

可见，$d(x)$的根就是 x^d-1 的全部根 α_1，α_2，…，α_d．由于 x^n-1 与 x^m-1 的根都是一重的，$d(x)$的根也都是一重的，$d(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_d)=x^d-1$．

解法二 设 α 是 x^n-1 与 x^m-1 的公共根，则 $\alpha=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=\cos\frac{2j\pi}{m}+i\sin\frac{2j\pi}{m}, 0\leqslant k\leqslant n-1, 0\leqslant j\leqslant m-1$．于是$\frac{k}{n}=\frac{j}{m}=\frac{s}{t}$，$\frac{s}{t}$是由$\frac{k}{n}$与$\frac{j}{m}$约分得到的最简分数，分母 t 是 n与m 的公约数，整除 n 与 m 的最大公约数 d．于是 $\alpha^d=\cos\left(\frac{2s\pi}{t}\cdot d\right)+i\sin\left(\frac{2s\pi}{t}\cdot d\right)=1$，$\alpha$ 是 x^d-1的根．反过来易见 x^d-1 的根是 x^n-1 与 x^m-1 的公共根．于是仍可得出 $(x^n-1, x^m-1)=x^d-1$．

例 2 求所有的正整数 m 与 n 使 $1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn}$ 被 $1+x+x^2+\cdots+x^m$ 整除．（第六届美国数学竞赛试题．）

解 记 $f(x)=1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn}$，$g(x)=1+x+x^2+\cdots+x^m$．由于 $x^{m+1}-1=(x-1)g(x)$的根都是一重的，$x^{m+1}-1$的因子 $g(x)$的根也都是一重的．故 $g(x)\mid f(x)$的充分必要条件为：$g(x)$的根都是 $f(x)$的根．由于 $x^{(m+1)n}-1=(x^n-1)f(x)$，$g(x)\mid(x^{m+1}-1)\mid(x^{(m+1)n}-1)$，$g(x)$的根都是 $x^{(m+1)n}-1$ 的根．要使 $g(x)$的根都是 $f(x)$的根，充分必要条件为：$g(x)$的根都不是 x^n-1 的根，即：$g(x)$与 x^n-1 无公共根，$x^{m+1}-1$ 与 x^n-1 的公共根只有 1．$(x^{m+1}-1, x^n-1)=x-1$．但由例 1 知 $(x^{m+1}-1, x^n-1)=x^{(m+1,n)}-1$．于是，满足条件 $(m+1, n)$

$=1$ 的所有 m，n 为所求.

二、辗转相除法

在一般情况下，很难求出多项式 $f(x)$,$g(x)$的全部复数根，因而不能用求公共根的办法来求最高公因式. 但却总可以用下面介绍的辗转相除法，作一系列带余除法来求最高公因式.

多项式 $f(x)$与 $g(x)$的公因式都整除$S(x)f(x)+T(x)g(x)$，这里 $S(x)$，$T(x)$是任意多项式. 特别，最高公因式$(f(x),g(x))$整除 $f_1(x)=f(x)+T(x)g(x)$；当然$(f(x),g(x))$整除$g(x)$，于是$(f(x),g(x))$整除$(f_1(x),g(x))$. 反过来，由$f(x)=f_1(x)-T(x)g(x)$又可知$(f_1(x),g(x))$整除$(f(x),g(x))$，这说明$(f(x),g(x))=(f_1(x),g(x))$. 于是，在求$(f(x),g(x))$时我们可以用任意 $f(x)+T(x)g(x)$来代替 $f(x)$，特别当 $g(x)\neq 0$我们用余式 $r(x)=f(x)-q(x)g(x)$代替 $f(x)$来简化运算. 这就得到了求$(f(x),g(x))$的辗转相除法如下：

在 $g(x)|f(x)$时$(f(x),g(x))=b^{-1}g(x)$，当 $f(x)|g(x)$时$(f(x),g(x))=a^{-1}f(x)$，a,b 分别是 $f(x)$与 $g(x)$的首项系数. 其余情况不妨设 $\deg f(x)>\deg g(x)$，用 $f(x)$除以 $g(x)$得余式 $r_1(x)$，当 $r_1(x)\nmid g(x)$再用 $g(x)$除以 $r_1(x)$得余式 $r_2(x)$. 照此下去可得一系列余式 $r_1(x)$，$r_2(x)$，…，$r_i(x)$，…，其中每个 $r_{i+1}(x)$是 $r_{i-1}(x)$除以 $r_i(x)$的余式. $(f(x),g(x))=(g(x),r_1(x))=(r_1(x),r_2(x))=\cdots=(r_{i-1}(x),r_i(x))=\cdots$. 由于$\deg f(x)>\deg g(x)>\deg r_1(x)>\cdots>\deg r_i(x)>\cdots$，经过有限次之后必然得到某个 $r_{k+1}(x)=0$，$r_k(x)\neq 0$,$r_k(x)|r_{k-1}(x)$,$(f(x),g(x))=(r_{k-1}(x),r_k(x))=\lambda r_k(x)$,$\lambda$是常数(使$\lambda r_k(x)$为首一多项式).

在实际计算时，为了避免在带余除法中过早出现分系数，还可应用等式$(f(x),g(x))=(\lambda f(x),\beta g(x))$，其中$\lambda$，$\beta$是任意非零常数.

例 3 求$(x^4-x^3+x^2+2,x^4+3x^3+x^2-2)$.

解 $f(x)=x^4+3x^3+x^2-2$ 除以 $g(x)=x^4-x^3+x^2+2$ 余 $r_1(x)=4x^3-4$，$g(x)$ 除以$\frac{1}{4}r_1(x)$ 余 $r_2(x)=x^2+x+1$，$r_2(x)\left|\frac{1}{4}r_1(x)\right.$，于是$(g(x),f(x))=r_2(x)=x^2+x+1$.

例 4 求证：对任意自然数 n，$2n^2+n$ 与 $3n^2+2n+1$ 的最大公约数为 1 或 3.

证 $(2n^2+n,\ 3n^2+2n+1)=(2n^2+n,(3n^2+2n+1)-(2n^2+n))=(2n^2+n,\ n^2+n+1)=((2n^2+n)-2(n^2+n+1),\ n^2+n+1)=(-n-2,n^2+n+1)=(n+2,(n^2+n+1)-(n+2)(n-1))=(n+2,\ 3)|3$，故$(2n^2+n,\ 3n^2+2n+1)=1$ 或 3.

注意在例 4 中不能用$(3n^2+2n+1)-\frac{3}{2}(2n^2+n)=\frac{1}{2}n+1$ 代替 $3n^2+2n+1$来求$(2n^2+n,3n^2+2n+1)$.

由于$(f(x),\ g(x))$是由 $f(x)$与$g(x)$经过一系列带余除法得出的，当 $f(x)$与 $g(x)$的系数在某个数域中时，$(f(x),\ g(x))$的系数也在这个数域中.

例 5 证明：如果两个整系数三次方程有一个公共的无理根，那么它们还有另一个公共根.（1965-1966 年波兰数学竞赛题.）

证 设这两个方程 $f(x)=0$ 与 $g(x)=0$ 的公共的无理根为 α. 用$f(x)$除以 $g(x)$得余式 $r(x)=f(x)-\lambda g(x)=ax^2+bx+c$，$\lambda$，$a$，$b$，$c$ 都是有理数. $a\alpha^2+b\alpha+c=f(\alpha)-\lambda g(\alpha)=0$. 当 $a=0$ 时应有 $b=0$ $\left(\text{否则 } \alpha=-\frac{c}{b}\text{为有理数，矛盾}\right)$，$c=0$. $f(x)=\lambda g(x)$，$g(x)=0$ 的全部根即是 $f(x)=0$ 与 $g(x)=0$的全部公共根，而 $g(x)=0$ 必有根 $\beta\neq\alpha$（否则 $g(x)=A(x-\alpha)^3=Ax^3-3\alpha Ax^2+\cdots$，由 A 与 $-3\alpha A$ 为有理数将得 α 为有理数，矛盾）. 现在设 $a\neq0$，用 $g(x)$ 除以 $r(x)$ 得余式 $r_1(x)=g(x)-q(x)r(x)=dx+e$，$r_1(x)$与 $q(x)$都是有理系数多项式. $d\alpha+e$

$= g(\alpha)-q(\alpha)r(\alpha)=0$ 从而 $d=e=0$，$r(x)\mid g(x)$. 且由 $f(x)=\lambda g(x)+r(x)$ 知 $r(x)\mid f(x)$，$r(x)=0$ 的根都是 $f(x)=0$ 与 $g(x)=0$ 的公共根，且 $r(x)=0$ 必另有根 $\beta\neq\alpha$（否则 $r(x)=a(x-\alpha)^2=ax^2-2\alpha ax+a\alpha^2$，由 a 与 $-2\alpha a$ 为有理数得 α 为有理数，矛盾）.

例 5 的结论对任意次数的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 也都成立，证明如下：

$f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高公因式 $d(x)$ 可用一系列带余除法得出，因此仍为有理系数多项式. $d(x)=0$ 的根就是 $f(x)=0$ 与 $g(x)=0$ 的全部公共根. 特别，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的公共无理根 α 是 $d(x)=0$ 的根，因而 $\deg d(x)\geqslant 1$. 如果 $d(x)=0$ 除去 α 之外没有别的根，则 $d(x)=A(x-\alpha)^m=Ax^m-m\alpha Ax^{m-1}+\cdots$，由系数 A 与 $-m\alpha A$ 为有理数知 α 应为有理数，矛盾.

三、多项式的重根

如果多项式 $f(x)$ 的根 α 的重数至少是 2，即 $(x-\alpha)^2\mid f(x)$，就称 α 为 $f(x)$ 的重根. 为了判断 α 是否 $f(x)$ 的重根，需要求 $f(x)$ 除以 $(x-\alpha)^2$ 的余式.

例 6 n 为自然数. 求证 $(x-1)^2\mid x^{n+1}-n(x-1)-x$.

证 $f(x)=x^{n+1}-n(x-1)-x=x(x^n-1)-n(x-1)=(x-1)q(x)$，其中 $q(x)=x(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)-n$. $q(1)=n-n=0$，由因式定理知 $(x-1)\mid q(x)$，从而 $(x-1)^2\mid f(x)$.

例 7 $n>1$，求方程 $f(x)=x^n-nx+n-1$ 的根 1 的重数.

解 要求的是使 $(x-1)^m\mid f(x)$ 的最大指数 m. 令 $y=x-1$，则 m 就是使 $y^m\mid f(y+1)$ 的最大整数，也就是 $f(y+1)$ 的展开式中最低次非零项的次数. 但 $f(y+1)=(y+1)^n-n(y+1)+n-1=y^n+C_n^1y^{n-1}+\cdots+C_n^{n-2}y^2+ny+1-ny-n+n-1=y^n+C_n^1y^{n-1}+\cdots+C_n^{n-2}y^2$，最低次非零项为 $C_n^{n-2}y^2$，故 1 在 $f(x)$ 中的重数为2.

例 8 如果 $n>1$，证明 $(x+1)^n-x^n-1=0$ 有重根当且仅当

$n-1$ 被 6 整除.

证 设 $f(x)=(x+1)^n-x^n-1=0$ 有重根 α，则 $f(x)$ 被 $(x-\alpha)^2$ 整除. 令 $y=x-\alpha$，则 $f(y+\alpha)$ 被 y^2 整除. 但 $f(y+\alpha)=(y+\alpha+1)^n-(y+\alpha)^n-1=Q(y)y^2+[n(\alpha+1)^{n-1}-n\alpha^{n-1}]y+f(\alpha)$，故 $n(\alpha+1)^{n-1}-n\alpha^{n-1}=f(\alpha)=0$，$\alpha$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)=n(x+1)^{n-1}-nx^{n-1}$ 的公共根，也就是最高公因式 $(f(x),f'(x))$ 的根. 因此，$f(x)$ 有重根的充分必要条件为 $(f(x),f'(x))\neq 1$，$(f(x),f'(x))=\left(f(x),\frac{1}{n}f'(x)\right)=\left(f(x)-\frac{1}{n}f'(x)\cdot(x+1),\ \frac{1}{n}f'(x)\right)=(x^{n-1}-1,(x+1)^{n-1}-x^{n-1})=(x^{n-1}-1,(x+1)^{n-1}-x^{n-1}+(x^{n-1}-1))=(x^{n-1}-1,(x+1)^{n-1}-1)$. 要使 $(x^{n-1}-1,(x+1)^{n-1}-1)\neq 1$，就是要方程 $x^{n-1}-1=0$ 与 $(x+1)^{n-1}-1=0$ 有公共解 α，$\alpha^{n-1}=(\alpha+1)^{n-1}=1$，$\alpha=\cos\frac{2k\pi}{n-1}+i\sin\frac{2k\pi}{n-1}$，$0\leqslant k\leqslant n-2$，由 $|\alpha+1|=\sqrt{\left(1+\cos\frac{2k\pi}{n-1}\right)^2+\left(\sin\frac{2k\pi}{n-1}\right)^2}=1$ 得 $\cos\frac{2k\pi}{n-1}=-\frac{1}{2}$，$\alpha+1=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}\pm i\sin\frac{\pi}{3}$，由 $(\alpha+1)^{n-1}=1$ 即知 $6|(n-1)$. 反过来当 $6|(n-1)$ 时 $\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 就是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公共根，因而是原方程的重根.

对任意 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$，$f(y+a)$ 除以 y^2 的余式是 $f'(\alpha)y+f(\alpha)$，因而 $f(x)$ 除以 $(x-\alpha)^2$ 的余式为 $f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$，这里 $f'(\alpha)=na_n\alpha^{n-1}+(n-1)a_{n-1}\alpha^{n-2}+\cdots+2a_2\alpha+a_1$. α 是 $f(x)$ 的重根的充分必要条件为 $f'(\alpha)=f(\alpha)=0$，即 α 是 $f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$ 与 $f(x)$ 的公共根，即 $(f(x),f'(x))$ 的根. $f(x)$ 有重根的充分必要条件为 $(f(x),f'(x))\neq 1$. 注意 $f'(\alpha)$ 就是多项式 $q(x)$

$=\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$当$x=\alpha$时的值，也是函数$\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$当$x\to\alpha$时的极限，即$f(x)$在$x=\alpha$处的导数．$f'(x)$就是$f(x)$的导数．

四、互素的多项式

用辗转相除法求$(f(x), g(x))$的时候，得到一串余式$r_1(x)$，$r_2(x)$，…，$r_k(x)$，其中每个$r_i(x)=r_{i-2}(x)-q_i(x)r_{i-1}(x)$，$1\leqslant i\leqslant k$(约定$r_0(x)=g(x)$，$r_{-1}(x)=f(x)$)．最后一个余式$r_k(x)|r_{k-1}(x)$，从而$(f(x), g(x))=\lambda r_k(x)=\lambda r_{k-2}(x)-\lambda q_k(x)r_{k-1}(x)$．将$r_{k-1}(x)=r_{k-3}(x)-q_{k-1}(x)r_{k-2}(x)$代入并整理得$(f(x),g(x))=S_{k-2}(x)r_{k-3}(x)+T_{k-2}(x)r_{k-2}(x)$，$S_{k-2}(x)$与$T_{k-2}(x)$是某两个多项式．再将$r_{k-2}(x)$的表达式代入并整理得$(f(x),g(x))=S_{k-3}(x)r_{k-4}(x)+T_{k-3}(x)r_{k-3}(x)\cdots\cdots$．最后可得$(f(x),g(x))=S(x)f(x)+T(x)g(x)$，$S(x)$与$T(x)$是某两个多项式．特别当$f(x)$与$g(x)$互素时有$S(x)f(x)+T(x)g(x)=1$反过来，如果有多项式$S(x)$与$T(x)$使$S(x)f(x)+T(x)g(x)=1$，则$(f(x),g(x))|1$，$(f(x),g(x))=1$．

例9　$f(x)=x^3+x^2+1$，$g(x)=x^2+1$，求一对多项式$S(x)$，$T(x)$使$S(x)f(x)+T(x)g(x)=(f(x),g(x))$．

解　$r_1(x)=f(x)-(x+1)g(x)=-x$，$r_2(x)=g(x)-(-x)r_1(x)=1$，于是$(f(x), g(x))=1=g(x)-(-x)(f(x)-(x+1)g(x))=xf(x)+(1-x-x^2)g(x)$，$S(x)=x$与$T(x)=1-x-x^2$为所求．

例10　求多项式$P(x)$，使$P(x)$被x^2+1整除，$P(x)+1$被x^3+x^2+1整除．

解　要求$P(x)=Q_1(x)(x^2+1)$，$P(x)+1=Q_2(x)(x^3+x^2+1)$，于是$1=(P(x)+1)-P(x)=Q_2(x)(x^3+x^2+1)-Q_1(x)(x^2+1)$．在例11中已求得$x(x^3+x^2+1)+(1-x-x^2)(x^2+1)=1$．故取$Q_2(x)=x$，$Q_1(x)=-(1-x-x^2)$，$P(x)=Q_1(x)(x^2+1)$

$=(x^2+x-1)(x^2+1)$即为所求．

一般地，设 $f(x)$与 $g(x)$互素，则有 $S(x)$，$T(x)$使$S(x)f(x)+T(x)g(x)=1$，于是$P_1(x)=S(x)f(x)=1-T(x)g(x)$被$f(x)$与 $g(x)$除的余式分别是 0 和 1，而 $P_2(x)=1-P_1(x)$除以$f(x)$，$g(x)$分别余 1，0．要选 $P(x)$使 $P(x)$除以 $f(x)$，$g(x)$的余式分别等于指定的 $R_1(x)$，$R_2(x)$，取 $P(x)=R(x)=R_1(x)P_1(x)+R_2(x)P_2(x)$即可．如果另一个 $P(x)$除以$f(x)$，$g(x)$ 的余式也分别是 $R_1(x)$，$R_2(x)$，则 $P(x)$与 $R(x)$除以$f(x)g(x)$的余式相同．

例 11 多项式$f(x)$除以 x^2+1，x^2+2 的余式分别是 $4x+4$，$4x+8$，求 $f(x)$除以$(x^2+1)(x^2+2)$的余式．

解法一 $(x^2+2)-(x^2+1)=1$，x^2+2 除以 x^2+1 与 x^2+2 分别余 1 和 0，而$-x^2-1$ 除以 x^2+1 与 x^2+2 分别余 0 和 1，于是 $R(x)=(4x+4)(x^2+2)+(4x+8)(-x^2-1)$除以 x^2+1与x^2+2 的余式分别是 $4x+4$与 $4x+8$，与$f(x)$除以 x^2+1，x^2+2 的余式相同．可见 $f(x)-R(x)$被$(x^2+1)(x^2+2)$整除，由 $\deg R(x)\leqslant 3<\deg((x^2+1)(x^2+2))$即知 $R(x)$为所求余式，展开得 $R(x)=-4x^2+4x$．

解法二 $f(x)=Q(x)(x^2+2)+4x+8$，商式$Q(x)$再除以x^2+1得商式$q(x)$与余式$ax+b$，$f(x)=q(x)(x^2+1)(x^2+2)+(ax+b)(x^2+2)+4x+8=q(x)(x^2+1)(x^2+2)+(ax+b)(x^2+1)+ax+b+4x+8$．由$f(x)$除以 x^2+1 余 $4x+4$ 得 $ax+b+4x+8=4x+4$，$ax+b=-4$，$a=0$，$b=-4$．于是$f(x)$ 除以 $(x^2+1)(x^2+2)$ 的余式为$(ax+b)(x^2+2)+4x+8=-4(x^2+2)+4x+8=-4x^2+4x$．

例 12 求证：$\log_a x$不能表示成$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的形式，其中 $f(x)$与 $g(x)$是实系数多项式．

证 设 $\log_a x=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，经过约分可使$\dfrac{f(x)}{g(x)}$的分子与分母互

素，即$(f(x),g(x))=1$. $\frac{f(x^2)}{g(x^2)}=\log_a(x^2)=2\log_a x=\frac{2f(x)}{g(x)}$，$f(x^2)g(x)=2f(x)g(x^2)$，由$(f(x),\ g(x))=1$，可知存在多项式$S(x)$与$T(x)$使$S(x)f(x)+T(x)g(x)=1$，于是$S(x^2)f(x^2)+T(x^2)g(x^2)=1$，这说明$f(x^2)$与$g(x^2)$也互素．于是，由$f(x^2)\mid 2f(x)g(x^2)$可得$f(x^2)\mid 2f(x)$，由$g(x^2)\mid f(x^2)g(x)$可得$g(x^2)\mid g(x)$．但$\deg f(x^2)=2\deg(2f(x))$，$f(x^2)\mid 2f(x)$仅当$f(x)$是常数才可能．同样，由$g(x^2)\mid g(x)$也得出$g(x)$为常数．于是$\frac{f(x)}{g(x)}$为常数，$\log_a x$为常数，矛盾．

习　题　44

1．$m,\ n,\ p,\ q$是自然数，求$(1+x^p+x^{2p}+\cdots+x^{(n-1)p},\ 1+x^q+x^{2q}+\cdots+x^{(m-1)q})$.

2．证明在数列$2+1, 2^2+1, 2^{2^2}+1, \cdots, 2^{2^n}+1, \cdots$中任意两个数互素.

3．分数$\frac{21n+4}{14n+3}$对任何自然数n皆不可约.（第一届国际数学竞赛试题.）

4．(1) 求二次方程$x^2+p_1x+q_1=0$与$x^2+p_2x+q_2=0$有公共根的充要条件.

(2) 证明：如果上述二方程不重合且有公共根，且p_1，q_1，p_2，q_2为有理数，则两方程的根都是有理数.（1959-1960年波兰数学竞赛试题.）

5．已知方程$x^3-3x^2+4=0$有两根相等，解这个方程.

6．求三次方程$x^3+px+q=0$有重根的条件.

7．先证$x^6+x^4+3x^2+2x+2=0$的重根，再解这个方程.

8．求证e^x不能写成$\frac{f(x)}{g(x)}$的形式，其中$f(x)$与$g(x)$为实系数多项式.

9．求x^{30}除以$(x+1)^2(x^2+1)$的余式.

10．求一个5次多项式$P(x)$使$(x-1)^3\mid(P(x)+1)$，$(x+1)^3\mid(P(x)-1)$.

第45讲　n次方程

李 尚 志

一、一元二次方程

一元二次方程的性质是我们熟知的．但如何灵活应用，仍不是一件容易的事情

例1　设一元二次方程$(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$的两根相等，证明：a，b，c构成等差数列．

证　易看出$x=1$是根．于是两根都为1，两根之积$\frac{a-b}{b-c}=1$，$a-b=b-c$，a，b，c成等差数列．

例2　求常数A,B,C,D,p,q，使$A(x-p)^2+B(x-q)^2=5x^2+8x+14$，$C(x-p)^2+D(x-q)^2=x^2+10x+7$．

解　如果$A=0$或$B=0$，则$5x^2+8x+14=B(x-q)^2$或$A(x-p)^2$，方程$5x^2+8x+14=0$两根相等，判别式应为0．但判别式$8^2-4\times5\times14=-216\neq0$，矛盾．

可见A，B都不为0．考虑二次三项式$f(x)=\lambda(5x^2+8x+14)+(x^2+10x+7)=(5\lambda+1)x^2+(8\lambda+10)x+14\lambda+7$，其中$\lambda$为参数．当$\lambda=-\frac{C}{A}$或$-\frac{D}{B}$时，$f(x)=0$分别具有重根$q$或$p$，判别式$(8\lambda+10)^2-4(5\lambda+1)(14\lambda+7)=0$，解之得$\lambda=\frac{1}{2}$或$-\frac{2}{3}$．将$\lambda$的这两个值分别代入$f(x)$得$p=1$，$q=-2$或$p=-2$，$q=1$．

当$q=-2$，$p=1$时，在$A(x-1)^2+B(x+2)^2=5x^2+8x+14$与$C(x-1)^2+D(x+2)^2=x^2+10x+7$两式中取$x=-2$得$A=2$，$C=-1$，取$x=1$得$B=3$，$D=2$．当$p=-2$，$q=1$时$C$

$=2$，$A=-1$，$D=3$，$B=2$.

例3 求满足下列条件的所有的四实数组(x_1, x_2, x_3, x_4)，其中任一数加上其余三数之积等于2.（第七届国际数学竞赛试题.）

解 如果某个$x_i=0$，则对其余三数x_j，x_k，x_l有$x_j=x_j+x_ix_kx_l=2$，同样$x_k=x_l=2$，$x_i+x_jx_kx_l=0+8\neq 2$，矛盾.可见四个数都不能为0，它们的乘积$A\neq 0$.这时，对任一数x_i，其余三数之积$x_jx_kx_l=\dfrac{A}{x_i}$，$x_i+\dfrac{A}{x_i}=2$，$x_i^2-2x_i+A=0$.即：四个数都是二次方程$x^2-2x+A=0$的根.

如果这四个数不全相等，设$x_1\neq x_i$，而其余两数为x_j，x_k.x_1与x_i是方程$x^2-2x+A=0$仅有的两根，由$x_1\neq x_i$知$A\neq 1$，且$x_1x_i=A$，于是$x_jx_i=\dfrac{x_1x_ix_jx_k}{x_1x_i}=\dfrac{A}{A}=1$.如果$x_j\neq x_k$，则$x_j$，$x_k$也是方程仅有的两根，$A=x_jx_k=1$，矛盾.故$x_j=x_k$，$x^2{}_j=1$.如果$x_j=1$，则由$1^2-2\times 1+A=0$得$A=1$，仍矛盾.故$x_j\neq 1$，$x_j=-1$，由$(-1)^2-2\times(-1)+A=0$知$A=-3$.$x_1$，$x_i$是方程$x^2-2x-3=0$的两根，其中一个为3，另一个为$-1$.于是，当四数不全相等时，其中一数为3，另外三数为-1.

如果四个数全相等，则$x_1+x_1^3=x_1+x_2x_3x_4=2$，$x_1^3+x_1-2=0$.易见$x_1=1$是一个解，可知$x_1^3+x_1-2=(x_1-1)(x_1^2+x_1+2)=0$.$x_1^2+x_1+2=0$无实数解.故$x_1=x_2=x_3=x_4=1$为此种情形下的唯一实数解.

二、韦达定理

设n次方程$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_0=0$的$n$个复数根为$x_1,\cdots,x_n$，则有分解式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_0=(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

将此式右边展开并比较两边系数得：$\sigma_1(x_1, \cdots, x_n)=x_1+\cdots+$

$x_n=-\frac{a_1}{a_0}$, $\sigma_2(x_1,\cdots,x_n)=x_1x_2+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0}$, $\cdots$, $\sigma_k(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}x_{i_1}\cdots x_{i_k}=(-1)^k\frac{a_k}{a_0}$, $\cdots$, $\sigma_n(x_1,\cdots,x_n)=x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}$. 其中 $\sigma_k(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}x_{i_1}\cdots x_{i_k}$表示所有的$x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$之和，即从 x_1, $\cdots$, x_n 这 n 个数中每次取 k 个相乘、所有这些乘积之和.

例 4 如果方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 有三个成等差数列的实根，实数 a, b, c 应满足什么样的充分必要条件？(1951-1952年波兰数学竞赛试题.)

解 三根 x_1, x_2, x_3 成等差数列，因而 $x_1+x_3=2x_2$, $3x_2=x_1+x_2+x_3=-a$, $x_2=-\frac{a}{3}$, 代入原方程得$\left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(-\frac{a}{3}\right)+c=0$, $2a^3-9ab+27c=0$. 剩下的事情是要使另外两根 x_1, x_3 为实数. 我们有 $x_1+x_3=2x_2=-\frac{2a}{3}$, 又由 $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b$ 得 $x_1x_3=b-(x_1+x_3)x_2=b-\frac{2}{9}a^2$. 于是 x_1, x_3 是方程 $x^2+\frac{2}{3}ax+(b-\frac{2}{9}a^2)=0$ 的两根，此方程的两根都为实数的充要条件是$(\frac{2}{3}a)^2-4(b-\frac{2}{9}a^2)\geqslant0$, $a^2-3b\geqslant0$. 因此，所求的条件是：$2a^3-9ab+27c=0$ 且 $a^2-3b\geqslant0$.

三、对称函数

前面所定义的 $\sigma_k(x_1,\ \cdots,\ x_n)(1\leqslant k\leqslant n)$ 都是 x_1, $\cdots$, x_n这 n 个变量的函数. 而且，在这些函数表达式中，可以把 n 个变量的位置作任意掉换，函数表达式仍不变. 具有这种性质的函数称为对称函数，当它是多项式函数时称为对称多项式. $\sigma_k(x_1,\cdots,x_n)$ $(1\leqslant k\leqslant n)$这 n 个对称多项式被特别称为初等对称函数. 除此

以外还有许多别的对称函数，如 $s_m(x_1, \cdots, x_n)=x_1^m+x_2^m+\cdots+x_n^m$（$m$ 为自然数）.

在高等代数中可以证明：所有的对称多项式 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 都可以表示成初等对称函数 $\sigma_k(x_1, \cdots, x_n)$（$1\leqslant k\leqslant n$）的多项式．这里虽然还不能证明这个一般的结论，但我们应当学会一些简单的表示式．例如：$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=(x_1+\cdots+x_n)^2-2\cdot\sum\limits_{1<i<j<n}x_ix_j=\sigma_1{}^2-2\sigma_2$．又如，当 $n=2$ 时；$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3(x_1+x_2)x_1x_2=\sigma_1{}^3-3\sigma_1\sigma_2$；当 $n=3$ 时，由等式 $x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3=(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3)$ 可得 $x_1^3+x_2^3+x_3^3=\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2)+3\sigma_3$；而对一般的 n，有 $x_1^3+\cdots+x_n^3=(x_1+\cdots+x_n)(x_1^2+\cdots+x_n^2)-\sum\limits_{i\neq j}x_i^2x_j=\sigma_1(\sigma_1^2-2\sigma_2)-(\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3)=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$.

例 5 设 $\cos x$ 满足实系数方程 $a\cos^2x+b\cos x+c=0$．求 $\cos 2x$ 所满足的一个二次方程．（第一届国际数学竞赛试题．）

解法一 设二次方程 $ay^2+by+c=0$ 的两根为 y_1, y_2，其中 $y_1=\cos x$．由于 $\cos 2x=2\cos^2x-1$，我们设法以 $2y_1^2-1$ 与 $2y_2^2-1$ 为根造一个二次方程即可．由韦达定理，$y_1+y_2=-\dfrac{b}{a}$，$y_1y_2=\dfrac{c}{a}$，$y_1^2+y_2^2=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$．于是 $(2y_1^2-1)+(2y_2^2-1)=2(y_1^2+y_2^2)-2=\dfrac{2b^2-4ac-2a^2}{a^2}$，$(2y_1^2-1)\cdot(2y_2^2-1)=4(y_1y_2)^2-2(y_1^2+y_2^2)+1=\dfrac{4c^2-2b^2+4ac+a^2}{a^2}$．所求方程为 $\cos^2 2x-\dfrac{2b^2-4ac-2a^2}{a^2}\cos 2x+\dfrac{4c^2-2b^2+4ac+a^2}{a^2}=0$，

或化为 $a^2\cos^2 2x-(2b^2-4ac-2a^2)\cos 2x+(4c^2-2b^2+4ac+a^2)=0$.

解法二 由原方程得 $a\cos^2 x+c=-b\cos x$. 两边平方得 $(a\cos^2x+c)^2=b^2\cos^2x$. 将 $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ 代入并整理即得所需方程.

例6 x_1 与 x_2 是方程 $x^2+px-1=0$ 的两根，其中 p 为奇数。求证：对任何整数 $n\geqslant 0$，数 $x_1^n+x_2^n$ 和 $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ 是互素整数.（1964-1965 年波兰数学竞赛试题.）

证 由 $x_1x_2=-1$ 知 x_1，x_2 都不为 0.

对 n 用数学归纳法：当 $n=0$ 时，$x_1^0+x_2^0=2$ 与 $x_1^1+x_2^1=-p$ 是互素整数. 设已经知道 $x_1^n+x_2^n$ 与 $x_1^{n+1}+x_2^{n+1}$ 是互素整数，则 $x_1^{n+2}+x_2^{n+2}=(x_1+x_2)(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})-x_1x_2(x_1^n+x_2^n)=-p\cdot(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})+(x_1^n+x_2^n)$ 是整数，且 $(x_1^{n+1}+x_2^{n+1},\ x_1^{n+2}+x_2^{n+2})=(x_1^{n+1}+x_2^{n+1},\ x_1^{n+2}+x_2^{n+2}-(x_1+x_2)(x_1^{n+1}+x_2^{n+1}))=(x_1^{n+1}+x_2^{n+1},\ -x_1x_2(x_1^n+x_2^n))=(x_1^{n+1}+x_2^{n+1},\ x_1^n+x_2^n)=1$，如所欲证.

例7 设 x，y，z 为复数，$f(n)=x^n+y^n+z^n$，且 $f(n)=n$ 对 $n=1$，2，3 成立. 求 $f(4)$，$f(5)$，$f(6)$.

解 $\sigma_1=x+y+z=f(1)=1$，$\sigma_2=xy+xz+yz=\frac{1}{2}[(f(1))^2-f(2)]=-\frac{1}{2}$. 记 $\sigma_3=xyz$，则 x，y，z 是方程 $t^3-t^2-\frac{1}{2}t-\sigma_3=0$ 的三个根，从而是方程 $t^n-t^{n-1}-\frac{1}{2}t^{n-2}-\sigma_3t^{n-3}=0$ 的三个根，n 为整数且 $\geqslant 3$. 将 $t=x$，y，z 分别代入方程 $t^n-t^{n-1}-\frac{1}{2}t^{n-2}-\sigma_3t^{n-3}=0$ 的两边，再将所得的三个等式相加，得 $f(n)-f(n-1)-\frac{1}{2}f(n-2)-\sigma_3f(n-3)=0$. 这里，我们约定 $f(0)=3$.

将 $n=3$ 代入得 $3\sigma_3=f(3)-f(2)-\dfrac{1}{2}f(1)=\dfrac{1}{2}$，$\sigma_3=\dfrac{1}{6}$. 于是 $f(n)=f(n-1)+\dfrac{1}{2}f(n-2)+\dfrac{1}{6}f(n-3)$. 将 $n=4$ 代入即可求

得$f(4)=\frac{25}{6}$. 类似可得$f(5)=6$，$f(6)=\frac{103}{12}$.

一般地，对任意复数x_1，…，x_n，记$s_m=x_1^m+\cdots+x_n^m$，$\sigma_k=\sum\limits_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$，则$x_1,\cdots,x_n$是方程$x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^n\sigma_n=0$的根，当$m\geqslant n$时它们也都是$x^m-\sigma_1x^{m-1}+\sigma_2x^{m-2}-\cdots+(-1)^n\sigma_nx^{m-n}=0$的根，将$x=x_1$，…，$x_n$分别代入此方程，再将所得的$n$个等式相加，即得.

牛顿公式：$s_m-s_{m-1}\sigma_1+s_{m-2}\sigma_2-\cdots+(-1)^ns_{m-n}\sigma_n=0$.

四、根的相反数、倒数、平方

设x_1，…，x_n是n次方程$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$的$n$个根. 我们可以找出分别以这$n$个根的相反数、倒数或平方为根的新方程来.

对任意常数α，β且$\alpha\neq0$，以$\alpha x_i+\beta(1\leqslant i\leqslant n)$为根的方程为$\varphi(x)=a_0[x-(\alpha x_1+\beta)]\cdots[x-(\alpha x_n+\beta)]=0$，$\varphi(x)=\alpha^na_0\left(\frac{x-\beta}{\alpha}-x_1\right)\cdots\left(\frac{x-\beta}{\alpha}-x_n\right)$. 而由$f(x)=a_0(x-x_1)\cdots(x-x_n)$知$\varphi(x)=\alpha^nf\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)=a_0(x-\beta)^n+a_1\alpha(x-\beta)^{n-1}+\cdots+a_n\alpha^n$. 特别，取$\alpha=-1$及$\beta=0$可知以所有的$-x_i(1\leqslant i\leqslant n)$为根的方程为$a_0x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^na_n=0$.

当$a_n\neq0$时所有的$x_i\neq0(1\leqslant i\leqslant n)$，以$\frac{1}{x_i}(1\leqslant i\leqslant n)$为根的方程为$\varphi(x)=a_n\left(x-\frac{1}{x_1}\right)\cdots\left(x-\frac{1}{x_n}\right)=0$，$\varphi(x)=\frac{(-1)^na_nx^n}{x_1x_2\cdots x_n}\cdot a_0\left(\frac{1}{x}-x_1\right)\left(\frac{1}{x}-x_2\right)\cdots\left(\frac{1}{x}-x_n\right)=x^nf\left(\frac{1}{x}\right)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$.

以$y=x^2$为未知数、以$x_i^2(1\leqslant i\leqslant n)$为根的方程为$\varphi(y)=a_0^2\cdot(y-x_1^2)\cdots(y-x_n^2)=0$，$\varphi(y)=a_0^2(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)\cdots(x^2-x_n^2)$

$=[a_0(x-x_1)\cdots(x-x_n)][(-1)^n a_0(-x-x_1)\cdots(-x-x_n)]=$ $f(x)[(-1)^n f(-x)]=(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)(a_0x^n-a_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n a_n)$。

例 8 已知 r, s, t 是 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个根.

(1) 求以 r^2, s^2, t^2 为根的三次方程.

(2) 假定 $c\neq 0$，求 $\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{t^2}$.

解 (1) $(x^3+ax^2+bx+c)(x^3-ax^2+bx-c)=(x^3+bx)^2-(ax^2+c)^2=x^6+(2b-a^2)x^4+(b^2-2ac)x^2-c^2$，故 $x^3+(2b-a^2)x^2+(b^2-2ac)x-c^2=0$ 为所求的方程.

(2) 以 $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{s^2}$, $\frac{1}{t^2}$ 为根的一个方程是 $-c^2x^3+(b^2-2ac)x^2+(2b-a^2)x+1=0$，由韦达定理知 $\frac{1}{r^2}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{t^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$.

五、实根

n 次方程 $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的根如果全为非负实数，则由韦达定理知 $(-1)^k a_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 全为非负实数. 如果已知 $(-1)^k a_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 全为非负实数，则原方程没有负数根.

例 9 求证方程 $x^3-x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}=0$ 的根不是全为实数.

证 设原方程三个根 x_1, x_2, x_3 全为实数，则 x_1^2, x_2^2, x_3^2 全为非负实数. 由 $\left(x^3-x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}\right)\left(x^3+x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\right)=\left(x^3-\frac{1}{2}x\right)^2-\left(x^2+\frac{1}{6}\right)^2=x^6-2x^4-\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{36}$ 知以 x_1^2, x_2^2, x_3^2 为根的方程为 $x^3-2x^2-\frac{1}{12}x-\frac{1}{36}=0$，$x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2=-\frac{1}{12}<0$，$x_1, x_2, x_3$ 不能全为实数.

上题也可在一开始就直接计算 $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2=(x_1x_2+$

$x_1x_3+x_2x_3)^2-2(x_1+x_2+x_3)x_1x_2x_3=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\times1\times\frac{1}{6}=-\frac{1}{12}$ <0.

例 10 求证：不论 α 取何值，只要实系数方程 $x^4-2x^2+\alpha x+\beta=0$ 有四个实根，则必有 $|\beta|\leqslant1$.

证 设原方程四个实根为 x_1，x_2，x_3，x_4. 当 $\beta=0$ 时当然 $|\beta|\leqslant1$. 设 $\beta\neq0$，x_1^2，x_2^2,x_3^2,x_4^2都是正数,$\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)\geqslant\sqrt[4]{x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2}$. 但 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2\sum\limits_{1<i<j<4}x_ix_j=0^2-2\times(-2)=4$，$x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2=\beta^2$,故$1\geqslant\sqrt{\beta^2}$, $|\beta|\leqslant1$.

例 11 设 a 与 b 为实数，$2a^2<5b$. 证明五次方程 $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ 的根不能都是实数.（第十二届美国数学竞赛试题.）

证 设方程的五个根 x_1，x_2，…，x_5 全为实数，则对任意 $1\leqslant i<j\leqslant5$，有$(x_i-x_j)^2\geqslant0$，即 $x_i^2+x_j^2-2x_ix_j\geqslant0$. 将所有这些等式相加得 $4\sum\limits_{1<i<5}x_i^2-2\sum\limits_{1<i<j<5}x_ix_j\geqslant0$，即$4(a^2-2b)-2b\geqslant0$，$2a^2\geqslant5b$，与原题条件相违.

六、有理根与整数解

关于有理根的等式都可以化成关于整数的等式，从而可用整数的整除性质与因子分解.

例 12 如果整系数方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$有有理根，求证 a，b，c 中至少有一个是偶数.（1958-1959 年波兰数学竞赛试题.）

证 设既约分数$\frac{r}{s}$是这个方程的根，则 $a\left(\frac{r}{s}\right)^2+b\left(\frac{r}{s}\right)+c=0$，$ar^2+brs+cs^2=0$. 如果 a，b，c 都是奇数，又由 r 与 s 互素知 r 与 s 至少有一个为奇数，则 $ar^2+brs+cs^2$ 是三个奇数之和（当 r，s 都为奇数）或两个偶数与一个奇数之和（当 r，s 一奇一

偶)，只能为奇数，不能等于0，矛盾.

例 13(有理根定理) 如果既约分数$\frac{r}{s}$是整系数方程 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的根，则 $r|a_n$, $s|a_0$.

证 $s^nP\left(\frac{r}{s}\right)=a_0r^n+a_1r^{n-1}s+\cdots+a_{n-1}rs^{n-1}+a_ns^n=0$. 于是 $a_ns^n=-r(a_0r^{n-1}+a_1r^{n-2}s+\cdots+a_{n-1}s^{n-1})$被$r$整除，由$r,s$互素得$r|a_n$. 又 $s|a_0r^n=-s(a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}rs^{n-2}+a_ns^{n-1})$，由$r,s$互素得 $s|a_0$.

例 14 证明：如果在x取三个不同的整数值时，变量x的整系数多项式$f(x)$的绝对值都是1，那么$f(x)=0$没有整数根.(1967-1968年波兰数学竞赛试题.)

证 设$f(x)=0$有整数根x_0，则$f(x)=(x-x_0)Q(x)$; $Q(x)$是整系数多项式. 设对三个不同整数x_1,x_2,x_3有$|f(x_1)|=|f(x_2)|=|f(x_3)|=1$，则$|x_i-x_0|$整除$|f(x_i)|=1$，从而$|x_i-x_0|=1$对$1\leqslant i\leqslant 3$成立，当$x_1,x_2,x_3$互不相同时不可能.

例 15 求方程$n^2(n-1)^2=4(m^2-1)$的整数解m与n.

解 $4m^2-n^2(n-1)^2=4$，$[2m+n(n-1)][2m-n(n-1)]=4$. 4分解成的两个因子$2m\pm n(n-1)$的奇偶性相同，只能同时为±2. 由$2m+n(n-1)=2m-n(n-1)=\pm2$可解出$n=0$或1，$m=\pm1$

注意以上两题的关键是：设法让未知的整数去整除很小的整数d(题中$d=1,4$)，而d的因子的可能性很少.

习 题 45

1. 方程$x^2-px+q=0$的两根为r和s，且都不为0. 求以$r^2+\frac{1}{s^2}$和$s^2+\frac{1}{r^2}$为根的二次方程.(1956年北京数学竞赛试题.)

2. 为使方程$x^3+ax^2+bx+c=0$有三个成等比数列的不同的实根，实数

a，b，c 应满足什么样的充分必要条件．（1954-1955 年波兰数学竞赛试题．）

3．解方程$\sqrt[3]{(8-x)^2}+\sqrt[3]{(27+x)^2}=\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}+7$．

4．不展开括号而解方程$(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$．

5．解方程 $x^4+(x-4)^4=626$．（1957 年北京数学竞赛试题．）

6．解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=b^2, \\ xy=z^2. \end{cases}$$

其中 a，b 是给定的数．

问：a，b 满足什么条件时，x，y，z 为不同的正数？（第三届国际数学竞赛试题．）

7．已知实数 x,y,z满足条件 $x+y+z=3$，$x^2+y^2+z^2=5$，$x^3+y^3+z^3=7$，求 $x^4+y^4+z^4$．

8．求证：实系数方程 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+x^2+x+1=0$的根不能全是实数．

9．求证：对正整数 $n>1$，方程 $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=n^2$有一个有理根在 1 与 2 之间．

10．解方程组

$$\begin{cases} x+y+z+w=10, \\ x^2+y^2+z^2+w^2=30, \\ x^3+y^3+z^3+w^3=100, \\ xyzw=24. \end{cases}$$

11．求方程 $xy=x+y$ 的整数解．

12 求方程组$\begin{cases} x+y+z=0; \\ x^3+y^3+z^3=-18 \end{cases}$ 的整数解．

（1978年全国数学竞赛试题．）

第46讲　用图来解题

李炯生

1947年，在匈牙利举行数学竞赛的时候，出了这么一道题：证明，在任何六个人中，总有三个人相互认识，或者互不认识。这道题一出现，立即引起各国从事数学竞赛的数学教育家以及组合数学(特别是图论)专家的注目．1953年,美国普特南(Putnam)数学竞赛时，又出了这道题．1955年，加拿大著名组合数学专家格林伍德与格里逊专门撰写论文，对这道题作了推广，1958年,美国著名数学杂志《美国数学月刊》将这道题列为问题 $E1321$，广泛征求解答．以后，这道题的种种推广就经常被各种水平的数学竞赛用做试题．

一道数学竞赛题引起如此广泛的重视，自有其深刻的原因．扼要地说，这主要是因为它以组合数学的一个分支——图论作为背景，而且也因为它本身是组合数学中一类典型的问题——拉姆赛(Ramsey)型问题的雏形．当然，要想弄清这些话的含义，还有许多术语与细节需要加以说明．我们先从图的概念谈起．

什么是图？简单地说，所谓一个图 G 是由一个顶点集合 V 以及连结顶点集合 V 中顶点的边的集合 E 组成的．例如，图46-1所示的图 G_1，G_2，G_3，G_4 和 G_5 都是图．在图 G_1 中，顶点集合是 $V=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，边集合是 $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$，其中 e_1 是连结顶点 x_1 和 x_2 的边，等等．在图 G_2 中，顶点集合是 $V=\{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$，边集合是 $E=\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_9\}$．应指出的是，在图 G_2 中，两边的交点不一定是顶点．例如在图 G_1 中连结顶点 x_1 和 x_3 的边 e_2 与连结顶点 x_2 和 x_4 的边 e_4 相交，其交点并不是图 G_1 的顶点．为区别顶点和交

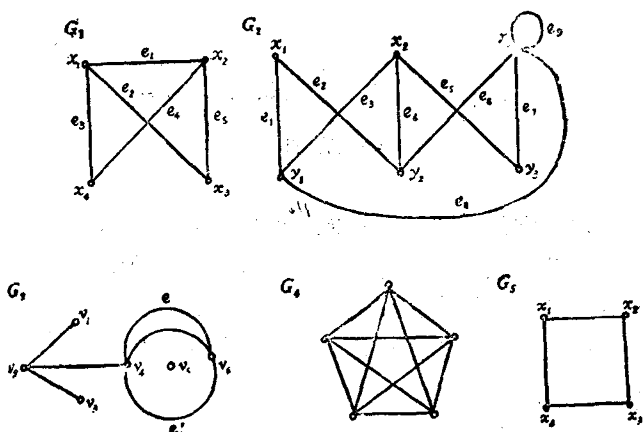


图 46-1

点，在图 G 中顶点总用小圆圈表示。

由顶点集合 V 与边集合 E 组成的图 G 记作 $G=(V, E)$. V 中的元素叫做顶点. 顶点集合 V 所含顶点的个数 $|V|$ 叫做图 G 的阶. 例如图 G_1 是 4 阶图，图 G_2 是 6 阶图，等等. 边集合 E 中的元素叫做边. 如果边 e 连结顶点 u 和 v，则边 e 记作 uv，并说 u 和 v 是相邻的. 否则就说 u 和 v 是不相邻的. 例如在图 G_1 中顶点 x_3 与 x_1 是相邻的，但与 x_4 不相邻. 如果边 e 连结的是同一个顶点 u，则 e 叫做过顶点 u 的环. 例如在图 G_2 中 e_9 即是过顶点 x_3 的环. 如果边 e 和 e' 连结的顶点是 u 和 v，则 e 和 e' 叫做重边. 例如在图 G_3 中边 e 和 e' 是重边. 没有环和重边的图叫做简单图. 例如图 G_1、G_4 和 G_5 都是简单图.

设 x 是图 G 的一个顶点，以 x 为一个端点的边的数目叫做 x 的度，记作 $d_G(x)$，或 $d(x)$. 例如在图 G_1 中顶点 x_1 的度是 3，顶点 x_3 的度是 2. 在图 G_2 中顶点 x_3 的度是 5，因为边 e_9 的两个端点都是 x_3，所以在计算 x_3 的度时环 e_9 必须算两次.

设图 G 的顶点集合 $V=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，顶点 x_i 的度是

d_i，$i=1, 2, \cdots, n$．则 $D=\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ 叫做图 G 的度序列．例如图 G_1 的顶点集合是 $V=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，度序列 $D=\{3, 3, 2, 2\}$．图 G_2 的顶点集合 $V=\{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$，度序列 $D=\{2,3,5,3,3,2\}$．

设 G 是一个 n 阶简单图，则 G 中任意一个顶点 x 的度 $d(x)$ 显然满足 $0\leqslant d(x)\leqslant n-1$．度为 0 的顶点，也即和其他顶点都不相邻的顶点叫做孤立点．例如在 G_3 中顶点 v_5 即是孤立点．如果 G 中每个顶点的度都相同，设都是 k，则 G 叫做 k 正则的，或正则的．零正则图，即任意两个顶点都不相邻的图叫做零图．$n-1$ 正则的 n 阶图，即任意两个顶点都相邻的图叫做 n 阶完全图，记作 K_n．例如图 G_4 即是 5 阶完全图 K_5．3 阶完全图 K_3 也叫做三角形．

判断两个图 $G_1=(V_1, E_1)$ 和 $G_2=(V_2, E_2)$ 是否相同，首先要看顶点集合 V_1 和 V_2 是否相同．如果 V_1 和 V_2 不同，则 G_1 和 G_2 是不同的．如果 V_1 和 V_2 相同，则要看边集合 E_1 和 E_2 是否相同．这就看 $V_1=V_2$ 中的任意两个顶点 x 和 y 在 G_1 中是否相邻，以及在 G_2 中是否相邻．如果 $V_1=V_2$ 中有一对顶点在 G_1 中的相邻关系与在 G_2 中的相邻关系不同，则 G_1 和 G_2 是不同的图．例如图 G_1 和 G_5 的顶点集合都是 $V=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，顶点 x_1 和 x_3 在 G_1 中相邻，但在 G_2 中不相邻．因此 G_1 和 G_5 是两个不同的图．这说明，确定一个图 $G=(V, E)$，需要两个条件．一个是图 G 的顶点集合 V，另一个是图 G 中任意两个顶点的相邻关系．

掌握了图的概念，就可以用它来解数学竞赛题．

例 1 有一团体，由 1982 个人组成，其中任意 4 个人中至少有一个人认识其他 3 个人．问该团体中认识所有其他人的成员最少有多少个？（美国 1982 年数学竞赛题．）

注 在数学竞赛题中，所说的“两个人认识”，是指这两个人

相互认识，例如，你知道大文豪巴金，但巴金不知道你，就不能说你和巴金认识.

解 把1982个人看成1982个顶点，其集合记作V. 对于x, $y\in V$，如果x和y所代表的两个人相互认识，则x和y相邻，否则x和y就不相邻. 这样便得到一个1982阶简单图G. 已知的条件是，图G中任意4个顶点，总有一个顶点和其他三个顶点都相邻. 如果这1982个人中X认识其他所有的人，则X所表示的顶点x在图G中的度$d(x)$应是1981. 于是所求的便是，图G中度为1981的顶点个数l最少是多少?

如果图G中任意两个顶点都相邻，则G中每个顶点的度都是1981，因此$l=1982$.

如果图G中有两个顶点x和y不相邻，则$d(x)\leqslant 1980$, $d(y)\leqslant 1980$. 因此$l\leqslant 1980$. 如果G中除x和y外，还有两个顶点u和v不相邻，则x, y, u和v这4个顶点不满足已知条件. 所以图G中除x和y外，其他任意两个顶点都相邻. 即对G中任意一个顶点u, $u\neq x, y$, $d(u)\geqslant 1979$. 如果G中有一个顶点u, $u\neq x, y$，它和x, y中某个顶点不相邻，不妨设u和x不相邻，则$d(u)\leqslant 1979$. 而G中其他任意一个顶点v, $v\neq x, y, u$，一定和x, y与u都相邻，否则已知条件对x, y, u, v 4个顶点不成立. 因此$d(v)=1981$. 所以$l=1979$. 如果图G中除x和y外的顶点u都和x与y相邻，则由上面的证明，$d(u)=1981$. 所以$l=1980$. 于是我们得到，$l\geqslant 1979$. 换句话说，该团体中至少有1979名成员认识其他所有成员.

在用图来解题时，重要的是将所要解的问题准确地翻译成有关图的命题. 其中关键是准确地规定图G中顶点之间的相邻关系.

例2 某个工厂有六种颜色的纱，用来生产双色布，每种双色布用两种颜色的纱搭配织成. 在生产过程中，每种颜色的纱至

少和其他三种颜色的纱搭配．证明，可以选出三种不同的双色布，它们包含所有六种颜色的纱．(匈牙利数学竞赛题)．

证 先将命题翻译成图的语言．用六个顶点表示六种颜色的纱．顶点的集合记作 V．如果在生产过程中两种颜色的纱可以搭配在一起生产出一种双色布，则相应的两个顶点相邻，这样就得到一个 6 阶简单图．已知条件是，每种颜色的纱至少和其他三种颜色的纱搭配，也就是说，图 G 中每个顶点 x 的度 $d(x)\geqslant 3$．所要证的是，图 G 中有三条边(即三种双色布)，其中任意两条边都没有公共端点(即任意两种双色布都没有用相同颜色的纱)．

设 $x_1\in V$．由于 $d(x_1)\geqslant 3$，所以 x_1 和某个顶点 x_2 相邻．再取 $x_3\in V$，$x_3\neq x_1$，x_2．由于 $d(x_3)\geqslant 3$，所以 x_3 和某个顶点 x_4 相邻，$x_4\neq x_1$，x_2，x_3．图 G 中留下两个顶点 x_5 和 x_6．如果 x_5 和 x_6 相邻，则边 x_1x_2 x_3x_4 x_5x_6 就是所求的三条边(图

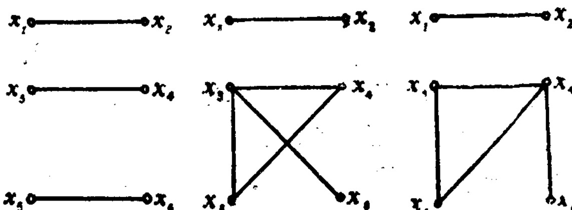


图 46-2　　图 46-3　　图 46-4

46-2)．设 x_5 和 x_6 不相邻．由于 $d(x_5)\geqslant 3$，$d(x_6)\geqslant 3$，所以图 G 中以 x_5 或 x_6 为端点的边至少有 6 条．这 6 条边的另一个端点是其他 4 个顶点之一，也即在边 x_1x_2 或 x_3x_4 上．因为这 6 条边中至少有 3 条边，它们的另一个端点是集中在边 x_1x_2 或 x_3x_4 上．不妨设这 3 条边的另一个端点分布在边 x_3x_4 上．而这 3 条边是以 x_5 或 x_6 为一端点．所以只能是图 46-3 或图 46-4 的情形．如果是图 46-3 的情形，则边 x_1x_2，x_3x_6 与 x_4x_5 为所求 3 条边；如果是图 46-4 的情形，则 x_1x_2，x_3x_5 与 x_4x_6 为所求 3 条边．

在证明例 2 的过程中，可以看出图在解题中的作用．这和平面几何证明题时可以做出几何图形来帮助思考问题是极其相似的．在例 2 中，我们先把命题翻译成图论的语言．然后画出点和线．并利用它们之间的关系来进行论证．这正是用图解题的好处．

例 1 和例 2 只用到了图的简单概念，即图的基本定义．当然光靠基本定义所能解的问题并不多．所以还必须掌握有关图的定理，即有关图的理论．这和下围棋一样．要成为好棋手，除了掌握围棋规则外，还必须掌握围棋的各种定式．下面是有关图的第一个定理，它是 1736 年著名数学家欧拉(Euler)在他所写的图论历史上第一篇论文中给出的．

定理 1 设 $G=(V, E)$ 是 n 阶图，$V=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$x_i$ 的度为 d_i，$i=1, 2, \cdots, n$．图 G 的边数记为 $q(G)$，则

$$d_1+d_2+\cdots+d_n=2q(G).$$

换句话说，图 G 中所有顶点的度之和等于边数的二倍．

证 根据顶点的度的意义可知，x_1 的度 d_1 是以 x_1 为一个端点的边的条数，x_2 的度 d_2 是以 x_2 为一个端点的边的条数，…，d_n 是以 x_n 为一个端点的边的条数．因此和 $d_1+d_2+\cdots+d_n$ 即是以 x_1，x_2，…，x_n 中某个顶点为一个端点的边的条数．因为一条边有两个端点，所以 G 的每条边在和中被算了两次．因此 $d_1+d_2+\cdots+d_n=2q(G)$．

尽管定理 1 非常简单，却有许多重要的应用．

例 3 证明，在任何一群人中，认识这群人中奇数个人的人有偶数个．(匈牙利数学竞赛题)．

证 人用顶点表示．对给定的一群人，与这群人相应的顶点的集合记作 V．如果两人相互认识，则相应两个顶点相邻，否则两顶点不相邻，得到图 G．图 G 中度是奇数的顶点叫做奇顶点．要证的是，图 G 中奇顶点的个数一定是偶数．

图 G 中所有奇顶点的集合记作 X，所有偶顶点(即度是偶数的顶点)的集合记作 Y. 并且记 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$，$Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_l\}$，设 x_i 的度为 d_i'，$i=1,2,\cdots,k$，y_j 的度为 d_j''，$j=1,2,\cdots,l$. 则由定理 1,

$$2q(G)=(d_1'+d_2'+\cdots+d_k')+(d_1''+d_2''+\cdots+d_l''),$$

即

$$d_1'+d_2'+\cdots+d_k'=2q(G)-(d_1''+d_2''+\cdots+d_l'').$$

由于 d_j'' 是 y_j 的度，所以 d_j'' 是偶数，$j=1, 2, \cdots, l$. 因此 $d_1''+d_2''+\cdots+d_l''$ 是偶数. 于是 $2q(G)-(d_1''+d_2''+\cdots+d_l'')$ 是偶数，即 $d_1'+d_2'+\cdots+d_k'$ 是偶数. 由于每个 d_i' 都是奇数，所以 k 是偶数. 这就证明，G 中奇顶点的个数是偶数.

习 题 46

1. 某团体的所有成员中，任意两个相互认识的人都没有公共的熟人，而任意两个相互不认识的人都恰有两个公共的熟人. 证明：该团体中每个人所认识的人数都相同.（南斯拉夫数学竞赛题.）
2. 平面上有 n 个点，其中任意两个的距离至少是 1. 证明：这 n 个点中至多有 $3n$ 对点，每对点的距离恰好是 1.
3. 有三所中学，每所有学生 n 个. 每个学生都认识其他两所中学的 $n+1$ 个学生. 证明：从每所中学可以选出一个学生，使选出来的 3 个学生相互认识.（匈牙利数学竞赛题.）

第47讲　图的染色

李 炯 生

用红、蓝两种颜色去染 n 阶完全图 K_n 的边，每条边染一种颜色，而且只染一种颜色，得到的图叫做2色完全图，仍记作 K_n．当然，如果 K_n 的边的染色方式不同，得到的2色完全图也不同．例如图47-1和图47-2给出了两个不同的2色完全图 K_5（图中实线表示红边，虚线表示蓝边）．

图47-1的2色完全图 K_5 含有红边三角形 $\triangle x_1x_2x_3$ 和蓝边三角形 $\triangle x_1x_4x_5$．但图47-2的2色完全图 K_5 却不含有三边同色的三角形．三边同色的三角形叫做单色三角形．这说明，用红、蓝二色去染完全图 K_5 的边，不能保证染出来的2色完全图 K_5 一定含有单色三角形．

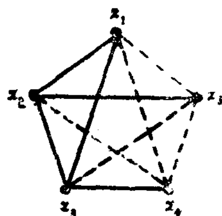


图 47-1

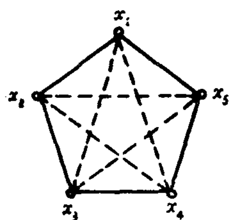


图 47-2

如果2色完全图 K_5 的阶数由5改为6，结论又应当怎样？对此，有

定理1　设 $n\geqslant 6$，则任何一个2色完全图 K_n 一定含有单色三角形．

证　容易看出，如果对任何一个2色完全图 K_6 结论成立，则结论对任何一个2色完全图 K_n 成立．因此只需对 $n=6$ 证明结论成立．

现在设 x 是2色完全图 K_6 的顶点．它连有5条边，而5条边有两种颜色，因此至少有3条边同色．不妨设边 xy_1，xy_2，xy_3 是红色的．如果 $\triangle y_1y_2y_3$ 中含有红边，设为 y_1y_2，则 $\triangle xy_1y_2$ 是红

色三角形；如果$\triangle y_1y_2y_3$不含红边，则$\triangle y_1y_2y_3$是蓝色三角形．因此 2 色完全图K_6一定含有单色三角形．

定理 1 可以推广到k种颜色的情形．用k种颜色c_1，c_2，…，c_k去染完全图K_n的边，每条边染且只染一种颜色，得到的图叫做k色完全图，仍记作K_n．可以想象，当阶数n增大时，k色完全图K_n的边数也增大，k色完全图K_n就可能含有单色三角形．使得每一个k色完全图K_n都含有单色三角形的最小阶数n，记作r_k．定理 1 说明，$r_2 \leqslant 6$，图47-2说明，$r_2 \geqslant 6$．因此$r_2=6$，很明显．$r_1=3$．著名逻辑学家拉姆赛首先证明了数r_k的存在性．所以r_k叫做拉姆赛数．

定理 2 对每个正整数k，拉姆赛数r_k存在，并且当$k \geqslant 2$时，

$$r_k \leqslant k(r_{k-1}-1)+2. \tag{1}$$

证 对k用归纳法．上面已指出，r_1，r_2存在，并且$r_1=3$，$r_2=6$．所以式(1)对$k=2$成立．设结论对k成立．即r_k存在，且(1)成立．现在证明结论对$k+1$成立．记$n=(k+1)(r_k-1)+2$，并设K_n是$k+1$色完全图．任取K_n的一个顶点x，它连有$n-1=(k+1)(r_k-1)+1$条边．这些边共有$k+1$种颜色．因此由抽屉原则，和x相邻的边中至少有r_k条边同色．设这r_k条边都是c色的，而且它们除x外的所有端点的集合记作U，则$|U|=r_k$，集合U以及所有连结U中的顶点的边的集合E组成一个r_k阶完全图(U,E)．显然，(U,E)是$k+1$色的．如果完全图(U,E)含有c色边yz，则$\triangle xyz$是c色三角形；如果完全图(U,E)不含c色边，则(U,E)是k色r_k阶完全图．由归纳假设，(U,E)中含有单色三角形，这就证明，K_n含有单色三角形．记

$$M=\{m \mid 任何\ m\ 阶\ k+1\ 色完全图都含有单色三角形\}.$$

则$n=(k+1)(r_k-1)+2 \in M$．即正整数集合$M \neq \phi$．因此r_{k+1}存在，并且$r_{k+1} \leqslant n=k(r_{k-1}-1)+2$．

定理 2 证明的关键在于应用了抽屉原则．这对于处理有关拉

姆赛数的问题是具有典型意义的．

由于$r=6$，因此由定理2立即得到

推论1 $r_3 \leqslant 17$．

可以构造出不含单色三角形的3色完全图K_{16}，因此$r_3=17$．

推论2 $r_4 \leqslant 66$．

证 已知$r_3 \leqslant 17$．由定理2，$r_4 \leqslant 4(r_3-1)+2=66$．

推论2说明，用4种颜色去染n阶完全图K_n的边，不管怎样染色，只要$n \geqslant 66$，则4色K_n一定含有单色三角形．

当$k \geqslant 4$时，拉姆赛数r_k的确定是一个难题，至今还不知道拉姆赛数r_4的值．

在数学竞赛中，经常出现有关拉姆赛数的试题．

例1 证明，在任何六个人中，总有三个人相互认识，或者互不认识．（匈牙利数学竞赛题．）

证 六个人用六个顶点表示．六个顶点之间任意两个顶点都连边，得到6阶完全图K_6．设x和y是K_6中两个顶点．如果x和y所表示的两个人相互认识，则边xy染成红色，否则边xy染成蓝色．于是K_6是一个2色完全图．定理1说明，K_6含有单色三角形$\triangle uvw$．如果$\triangle uvw$是红色的，则顶点u，v和w所表示的三个人相互认识；如果$\triangle uvw$是蓝色的，则u，v和w这三个人互不认识．这就证明，在任何六个人中，总有三个人相互认识，或者互不认识．

例2 有17名科学家，每名科学家都和其他科学家通信．他们在通信时只讨论三个题目，而且任何两名科学家在通信时只讨论一个题目．证明，其中至少有三名科学家，他们在相互通信时讨论的是同一个题目．（1964年国际数学竞赛题．）

证 用顶点表示科学家．17个顶点间任意两个顶点都连边，得到17阶完全图K_{17} 用3种颜色c_1，c_2与c_3分别表示3个题目A_1，A_2，A_3．如果顶点x和y所表示的两名科学家在通信时

讨论的是题目A_i，则边xy染成c_i色，$i=1,2,3$. 得到的是17阶3色完全图K_{17}. 由推论1,3色完全图K_{17}含有单色三角形$\triangle uvw$. 如果$\triangle uvw$是c_i色的，则u，v和w所表示的科学家在通信时讨论的是同一个题目A_i，$i=1,2,3$. 这就证明了例2.

拉姆赛数r_k还可以推广. 为此先介绍子图的概念. 设G是一个图，它的顶点集合与边集合分别是V与E. 如果图G_1的顶点集合V_1与边集合E_1满足$V_1\subseteq V, E_1\subseteq E$，则$G_1$叫做图$G$的子图. 例如图47-3中所示的图$G_1$与图$G_2$都是图$G$的子图. G_1是4阶完全图. 所以说5阶完全图G含有4阶完全子图G_1.

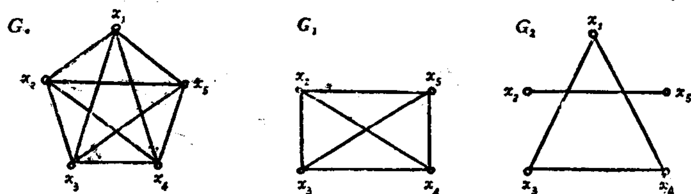


图 47 3

用k种颜色c_1，c_2，…，c_k去染n阶完全图K_n的边，得到k色完全图K_n. 设K_n含有m阶完全子图K_m，它的每条边都是c色的，则K_m叫做单色的. 对于给定的正整数$n_1,n_2,\cdots,n_k$，用$r(n_1,n_2,\cdots,n_k)$表示这样的正整数，使得当$n\geqslant r(n_1,n_2,\cdots,n_k)$时，任何一个$k$色完全图$K_n$要么含有$c_1$色完全子图$K_{n1}$，要么含有$c_2$色完全子图$K_{n2}$，…，要么含有$c_k$色完全子图$K_{n_k}$；而当$n<r(n_1,n_2,\cdots,n_k)$时，存在一个$k$色完全图$K_n$，它既不含有$c_1$色完全子图$k_{n_1}$，也不含有$c_2$色完全子图$K_{n2}$，…，又不含有$c_k$色完全子图$k_{n_k}$.

容易看出，当$n_1=n_2=\cdots=n_k=3$时，数$r(\underbrace{3,3,\cdots,3}_{k\text{个}})$即是拉姆赛数$r_k$. 数$r(n_1,n_2,\cdots,n_k)$仍叫做拉姆赛数. 可以证明，拉姆赛数$r(n_1,n_2,\cdots,n_k)$是存在的. 这里给出$k=2$的情

形的证明. 对于 $k\geqslant 2$,数$(n_1, n_2, \cdots, n_k)$的存在性的证明是相仿的.

定理 3 对于给定的正整数 p 和 q,拉姆赛数 $r(p,q)$存在,并且当 $p\geqslant 2, q\geqslant 2$时,

$$r(p,q)\leqslant r(p-1,q)+r(p,q-1). \qquad (2)$$

证 对正整数 $p+q=l$ 用归纳法. 很明显, $r(1,q)=1$, $r(2,q)=q$, $r(p,1)=1$, $r(p,2)=2$. 因此定理对 $l\leqslant 5$ 成立. 现在假设定理对适合 $p'+q'<l$ 的正整数 p' 和 q' 成立. 下面证明定理对满足 $p+q=l$ 的正整数 p 和 q 成立. 此时可设 $p\geqslant 3$, $q\geqslant 3$.

由归纳假设,拉姆赛数 $r(p-1,q)$与 $r(p,q-1)$ 都存在. 令 $m=r(p-1,q)+r(p,q-1)$. 设 K_m 是任意一个 2 色完全图,并且 x 是 K_m 中任意一个顶点. 由于 x 连有 $m-1=r(p-1,q)+r(p,q-1)-1$ 条边,这些边有 2 种颜色. 因此只能是: x至少连有 $r(p-1,q)$条红边,或者至少连有 $r(p,q-1)$条蓝边. 下面分情形讨论.

情形 1: x 至少连有 r 条红边,这里 $r=r(p-1,q)$. 不妨设 $xy_1, xy_2, \cdots, xy_r$ 是红边. R_m 中以 $y_1, y_2, \cdots, y_r$ 为顶点的完全子图记作 K_r. 由拉姆赛数 $r(p-1,q)$的意义, K_r 含有红色完全子图 K_{p-1}, 或者含有蓝色完全子图 K_q. 如果是后者,则K_m含有蓝色完全子图 K_q; 如果是前者,则不妨设红色完全子图 K_{r-1} 的顶点是 $y_1, y_2, \cdots, y_{r-1}$. 于是以 $x, y_1, \cdots, y_{r-1}$ 为顶点的 p 阶完全子图 K_p 是红色的. 这就证明,在情形 1 下, K_m 含有红 K_p 或蓝 K_q.

情形 2: x 至少连有 s 条蓝边,这里 $s=r(p,q-1)$. 此时将蓝色改成红色, s 改成 r, 即可和情形 1 一样证明, 2 色 K_m 含有红 K_p 或者蓝 K_q.

这就证明,任何一个 2 色完全图 K_n 要么含有红 K_p,要么含

有蓝r_q. 使得任何一个2色完全图K_n都要么含有红色完全子图K_p,要么含有蓝色完全子图K_q的所有正整数n的集合记作S.于是$m\in S$. 即$S\neq\phi$. 因此S具有最小正整数. 它就是拉姆赛数$r(p,q)$.所以拉姆赛数$r(p,q)$是存在的，并且

$$r(p,q)\leqslant r(p-1,q)+r(p,q-1).$$

定理3的证明方法是抽屉原则的变形，是处理图的染色问题的一种典型方法.

例3 在协会里有10个人，其中任意三个人中总有两人是相互认识的.证明，其中总有4个人，他们相互认识.（英国数学竞赛题.）

证 用10个顶点表示10个人. 10个顶点中任意两点都连线，得到10阶完全图K_{10}. 设x，y是K_{10}的两个顶点. 如果x和y表示的两个人相互认识，则x和y连一红边，否则连一条蓝边. 得到2色完全图K_{10}.已知条件"其中任意三个人中总有两人是相互认识的"相应于：2色完全图K_{10}中任意三角形一定有红边，即2色完全图K_{10}中不含蓝色三角形. 要证的是"其中总有4个人,他们相互认识"，也即2色K_{10}中含有红色完全子图. 因此要证的图的命题即是：如果2色完全图K_{10}不含蓝色三角形，则K_{10}含有红色完全子图K_4. 由拉姆赛数$r(4,3)$的意义可知，要证的即是$r(4,3)\leqslant 10$.

由定理3，$r(4,3)\leqslant r(3,3)+r(4,2)$. 而$r(3,3)=r_2=6$,$r(4,2)=4$.所以$r(4,3)\leqslant 10$.

例3利用了定理3. 也可以用定理3的证明方法直接给出证明.

例4 在例3中，将10改成9，结论是否成立?（波兰数学竞赛题.）

解 结论成立. 用图论语言来说，即有：不含蓝色三角形的2色完全图K_9一定含有红色完全子图K_4. 也即：$r(4,3)\leqslant 9$.

证如下：任取2色K_9的一顶点x. 如果x连有4条蓝边xy_1，xy_2，xy_3，xy_4，则因K_9不含蓝色三角形，故顶点为y_1，y_2，y_3，y_4的完全子图K_4是红色的；如果x连有6条红边xz_1，xz_2，…，xz_6，则由定理1，顶点为z_1，z_2，…，z_6的完全子图K_6含有单色三角形$\triangle z_iz_jz_k$，$1\leqslant i, j, k\leqslant 6$. 因$K_9$不含蓝三角形，故$\triangle z_iz_jz_k$是红三角形. 于是顶点为$z_iz_jz_k$，$x$的完全子图$K_4$是红的；最后，如果$K_9$中每个顶点都恰连有5条红边，则$K_9$中红边数是$\frac{9\times 5}{2}$，不可能.

例3和例4说明了数学竞赛对拉姆赛理论的兴趣. 其原因是，确定拉姆赛数$r(n_1, n_2, \cdots, n_k)$是数学中的难题. 已知的拉姆赛数只有很少的几个，它们是：$r(2, q)=q$，$r(3, 3)=6$，$r(3, 4)=r(4, 3)=9$，$r(3, 5)=14$，$r(3, 6)=18$，$r(3, 7)=23$，$r(4, 4)=18$，以及$r_1=3$，$r_2=9$，$r_3=17$，和$51\leqslant r_4\leqslant 65$.

习 题 47

1. 证明：在任何18个人中，总有4个相互认识，或者互不认识.
2. 画出一个既不含红三角形，也不含蓝色K_4的2色K_8.
3. 9名数学家在一次国际数学会议上相遇，他们当中任何3个人都至少有2人能讲同一种语言，而且每人最多能讲3种语言. 证明，至少有3名数学家能讲同一种语言.
4. 有一棱柱，上底与下底分别是5边形$A_1A_2A_3A_4A_5$与5边形$B_1B_2B_3B_4B_5$. 将上下底的5边形的每条边与线段A_iB_j，$1\leqslant i, j\leqslant 5$都染上红色或蓝色，每边与每一线段都只染一种颜色. 每个以棱柱的顶点为顶点并以染了色的线段为边的三角形都有两条边颜色不同. 证明，上下底上的边都同色.（国际数学竞赛题.）

习题提示与解答

习　题　3

1. 仿例 1 证明.

2. 将所给的等式分别变形为：

$$x+y=a-z, \tag{1}$$

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{2}-z^2. \tag{2}$$

这两式同时成立，意味着在直角坐标系中，(1)所表示的直线和(2)所表示的圆相交，从而原点到直线的距离不超过圆的半径. 用点到直线的距离公式表达这个不等关系，并解此不等式，即可证明$0\leqslant z\leqslant\frac{2}{3}a$，同理可证 $0\leqslant x$，$y\leqslant\frac{2}{3}a$.

3. 把所给的等式变形为

$$\begin{cases} x^2+\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2-2x\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)\cos150^\circ=5^2, \\ \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+z^2=3^2, \\ z^2+x^2-2xz\cos120^\circ=4^2. \end{cases}$$

上述三式关联到余弦定理及勾股定理.

作一个三角形ABC，P为其内部一点，使得$PA=z$，$PB=\frac{y}{\sqrt{3}}$，$PC=x$，$\angle APB=90^\circ$，$\angle APC=120^\circ$，$\angle BPC=150^\circ$，$AB=3$，$AC=4$，$BC=5$.

这样，$6=S_{ABC}=S_{APB}+S_{APC}+S_{BPC}=\frac{1}{2}z\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}xz\cdot\cos120^\circ+\frac{1}{2}x\cdot\frac{y}{\sqrt{3}}\cdot\sin150^\circ=\frac{1}{4\sqrt{3}}(xy+2yz+3xz)$，从而$(xy+2yz+3xz)=24\sqrt{3}$.

4. 注意$1\pm\sqrt{2}$是方程 $x^2-2x-1=0$ 的根，考虑

$$u_n=(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n.$$

利用上面的辅助方程得到 u_n 的递推公式，由此证明对 $n>1$，u_n 都是偶数(用归纳法)。

注意，当 n 为奇数时，$u_n<(1+\sqrt{2})^n<u_n+1$，从而$[(1+\sqrt{2})^n]=u_n$ 是偶数；当 n 为偶数时，$u_n-1<(1+\sqrt{2})^n<u_n$，从而$[(1+\sqrt{2})^n]=u_n-1$ 是奇数(参考例 10)。

5. 由于所说式子的对称性，不妨假设 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant\cdots\leqslant a_n$.

当 $n=3$ 时，左边前两项的和为$(a_1-a_2)^2\geqslant 0$，第三项不小于零，故不等式成立。

当 $n=5$ 时，同样可知左边前两项的和不小于零，末两项的和也不小于零，第三项是$(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)$，它也不小于零，故不等式成立。

对于 n 的其他值，为了指出不等式不成立. 我们来作出(特殊的)$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，使左边小于零.

若 n 是偶数，取 $a_1<a_2=a_3=\cdots=a_n(n\geqslant 4)$，则左边只有第一项非零，它是$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)$，为奇数个($n-1$个)负数相乘，故小于零.

若 $n\geqslant 7$(不必区分其奇偶性)，取

$$a_1=a_2=a_3<a_4<a_5=a_6=\cdots=a_n.$$

则左边只有一个非零项：

$$(a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\cdots(a_4-a_n),$$

前三项因式都是负数，而后面的都是正数，故它是负数，不等式不成立。

习 题 4

1. 可以取$a=\sqrt{2}$，$b=\log_{\sqrt{2}}3$，则不难用反证法证明 b 是无理数。

2. 设$\frac{a}{b}$是正有理数，a，b 都大于零，则

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{b^2}ab=\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{b}\right)^2$$

右边共有 ab 个 $\left(\frac{1}{b}\right)^2$ 相加.

3. 考虑多项式 $f_n(x)=\frac{1}{2}[(2x-1)^n+1]$，$n$ 是待定自然数. 因为 $(2x-1)^n+1$ 的系数都是偶数(用二项式定理来证这一点)，所以 $f_n(x)$ 是整系数多项式.

当 $x\in\left[\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\right]$ 时，有 $-\frac{4}{5}\leqslant 2x-1\leqslant\frac{4}{5}$，所以

$$\left|f_n(x)-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\left|2x-1\right|^n\leqslant\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

容易看出，当 $n\geqslant 28$ 时，必有 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{5}\right)^n<\frac{1}{10^3}$，因此，对 $n\geqslant 28$，任意这样的多项式都适合要求(退一步考虑问题，比较例 8 和例 9).

4. (也许在经过观察和尝试之后)可取

$$a_1=2^{100000}-2.$$

这时，$a_2=\left[\frac{3}{2}a_1\right]+1=3\cdot 2^{99999}-3+1=3\cdot 2^{99999}-2$,

$$a_3=\left[\frac{3}{2}a_2\right]+1=3^2\cdot 2^{99998}-3+1=3^2\cdot 2^{99998}-2,$$

……

$$a_{100000}=\left[\frac{3}{2}a_{99999}\right]+1=3^{99999}\cdot 2-2,$$

$$a_{100001}=\left[\frac{3}{2}a_{100000}\right]+1=3^{100000}-3+1=3^{100000}-2.$$

因此，数列的前 10^5 项都是偶数，而第 10^5+1 项是奇数.

5. 可以使纵轴的上半轴的整点(包括坐标原点)都染白色，纵轴的下半轴都染黑点，所有其他的点都染红色. 显然这种染法符合要求.

6. 注意内接于圆的直角三角形的斜边一定是此圆的直径.

任意作一条直径 AB，把圆周分成两个半圆，我们把其中一个半圆弧连同 A 点(不包含 B 点)染上一种颜色，另一个半圆弧连同 B 点(不包含 A 点)染上另一种颜色，那么这个圆的任一内接直角三角形的斜边两端点的颜色不同，因而三个顶点不都是同一种颜色.

习 题 5

1. 逆命题：如果一条直线和一个平面垂直，则这直线和这个平面内任何一条直线都垂直.

   否命题：如果一条直线和一个平面中的某些直线不垂直，则这直线和这个平面不垂直.

   逆否命题：如果一条直线和一个平面不垂直，那么这条直线和这个平面内某些直线不垂直.

2. 本题的结论是一个选言判断，即以"或…，或"为关联词. 这种命题的证明程序通常是(但不都是)：否定其中一项来证明另一项. 例如我们可以这样来证：

   假定 a，b，c 不相交于一点，证明它们两两平行.

3. 可以选择这样的证明程序：设$\{S_n\}$ (n是自然数) 中有一项为零，证明数列中必有无限项都为零.

   这种论证的推理过程是：$\{S_n\}$(n是自然数) 中或者没有零，或者有无限项为零，或者有但只有有限项是零. 我们证明不会是第三种情况. 从而只能是前两种情况.

4. 命题不正确，通过所说的三角形的外心作垂直于三角形所在平面的直线，则这条直线上的任意一点到三角形三顶点的距离都相等.

5. 论证中，命题(1)是正确的，但推理不对. 因为命题(2)是命题(1)的否命题. 一个命题正确，其否命题不一定正确. 即使否命题正确，也需要单独加以证明. 这样，所说的论证，从(1)到(2)的推理犯了"论据与论题没有因果关系"的错误. 命题(2)和命题(3)(即要证的结论)互为逆否命题，它们是等价的. 从(2)到(3)的推理，实际上是把欲证命题的等价命题作为要证命题的论据，这在逻辑上犯了"循环论证"的错误.

   正确的证法略述如下：

   设$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为平行六面体，$AC_1=A_1C=BD_1=B_1D$.

   连 AC，A_1C_1，B_1D_1，先证明AA_1C_1C是矩形，从而$AA_1\perp A_1C_1$.

   同理 $BB_1\perp B_1D_1$，可推出 $AA_1\perp B_1D_1$.

   这样不难得出所说的六面体是直平行六面体.

最后用三角形全等来证明 $A_1B_1C_1D_1$是矩形，从而$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$是长方体。

习　题　6

1. 先推论这个立方体的下面涂什么颜色．从逻辑上讲，它只可能是黄、蓝、绿中的一种．由图 6-1 所示可知，它不可能是黄色，因从第二个立方体可看到黄色同黑色相邻而不是相对(由假设，四个立方体的涂色次序相同)．同时，从第三个立方体中可以看出，蓝色同黑色是相邻的．所以这个立方体的底面也不是蓝色．既然不是黄、蓝两色，那它当然是绿色．
   再推断这个立方体左面的颜色．现在左面涂的颜色只有黄、蓝两种可能．但从第四个立方体可知，它不会是黄色，因为黄色同白色应当相邻．所以它只能是蓝色．
   这样，这个立方体的背面只能是黄色．
   注意，在本题的推理中，立方体的左，背，底三面并不"对称"．如果先推断左面或背面的颜色，将得不出结果．应以考虑底面的颜色作为推理的出发点．(解数学题时，读者应当注意总结类似的经验．)
2. 解题的第一个要点是把问题"数字化"．我们设

$$x_i=\begin{cases}1, & \text{如果第}\ i\ \text{题是对的};\\ -1, & \text{如果第}\ i\ \text{题是错的}.\end{cases}$$

   $i=1,\ 2,\ \cdots,\ 7.$
   这样如果判断第 i 题为正确，即画了符号"√"，则他得到 x_i 分．推理如下(二难推理!)：
   如果第 i 题是对的(即$x_i=1$)，那么他判断对了，所以得 1 分(即x_i分)；如果第 i 题是错的(即 $x_i=-1$)，那么他判断错了，应得-1 分(正好也是 x_i 分)．同理，如果判断第 i 题为错，即画了符号"×"，他就得到$-x_i$分．
   注意，A，B，C，D 各得 2 分，由题目中的答案表得到下列等式：

$$x_1-x_3+x_4-x_5+x_6+x_7=2,$$
$$x_1-x_2+x_3+x_4-x_5-x_6=2,$$
$$x_2-x_3-x_4+x_5-x_6+x_7=2,$$

$$-x_1-x_2-x_3+x_4+x_5-x_7=2,$$

把四个式子相加，得

$$x_1-x_2-2x_3+2x_4-x_6+x_7=8.$$

注意 $x_i=\pm1(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$，故左边$\leqslant8$. 而右边是8，从而只有 $x_1=1$，$x_2=-1$，$x_3=-1$，$x_4=1$，$x_6=-1$，$x_7=1$，明显地 $x_5=1$. 这样第一、四、五、七题的正确答案是"对"，第二、三、六题的正确答案是"错"。这样容易看出 E 得4分。

3. 关键是先确定 p，q，r 的值.

假设游戏共进行了 k 轮. 注意无论卡片怎样混合，每一轮三个人领到的弹子数目的总和不变！即是 $p+q+r$. 这样

$$k(p+q+r)=20+10+9=1\times39=3\times13.$$

由于 $k\geqslant2$，而 $p+q+r\geqslant1+2+3=6$，故必须 $k=3$，$p+q+r=13$.

因 B 得到过 r 个弹子，因此 $r\leqslant10-1-1=8$，从 A 得到20个弹子，推出 $3r>20$，$r\geqslant7$，这样 r 为7或者8.

如果 $r=7$. 则由 B 的弹子数

$$10\geqslant r+2p=7+2p$$

推出 $p=1$. 但此时 $r+2p=9<10$，故 B 必得到过一次2个弹子，即 $q=2$. 这和 $p+q+r=13$ 矛盾！

这样 $r=8$，同样得出 $q=1$，因而 $q=13-r-p=4$.

所以 A 的弹子数只能是前两轮各得8个，最后一轮得4个，而 B 在第一轮得了 $p=1$ 个弹子，这样第一轮是C得了 $q=4$ 个弹子.

习　题　7

1. 设 $AP=a$，$BP=b$，$CP=c$，$DP=d$，$\angle APB=\alpha$.

则有 $\triangle ABP=\frac{1}{2}ad\sin\alpha$，$\triangle BPC=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$，$\triangle CPD=\frac{1}{2}cd\sin\alpha$，$\triangle APD=\frac{1}{2}ad\sin\alpha$，按条件有

$$ab+cd=bc+ad,$$

即

$$(a-c)(b-d)=0,$$

所以 $a=c$ 或者 $b=d$.

2. 设平分三角形 ABC 面积和周长的直线交边 AC，BC 分别为点 P 和 Q，

ABC内切圆的圆心为点O，r表示内切圆半径．我们来证明$\triangle POQ=0$，从而O，P，Q三点共线．连OA,OB,OC可算出$ABQOP$的面积是$\frac{1}{2}r\cdot(AP+AB+BQ)$，$OQCP$的面积是$\frac{1}{2}r(QC+CP)$．又因直线$PQ$平分三角形周长，所以$AP+AB+BQ=QC+CP$．这样上面说的两个面积相等．又按条件，$ABQP$的面积等于三角形$QCP$的面积．从而$\triangle OQP=0$．

3．连结PA，PB，PC，则有面积等式

$$\triangle PAB+\triangle BPC+\triangle CPA=\triangle ABC,$$

从面积公式推出所说的距离之和等于三角形ABC的高，这与P的位置无关．

4．我们有(参见例5的解法)

$$\frac{PQ_1}{P_1Q_1}+\frac{PQ_2}{P_2Q_2}+\frac{PQ_3}{P_3Q_3}$$

$$=\frac{\triangle PP_2P_3}{\triangle P_1P_2P_3}+\frac{\triangle PP_3P_1}{\triangle P_1P_2P_3}+\frac{\triangle PP_1P_2}{\triangle P_1P_2P_3}=1,$$

所以$\frac{PQ_i}{P_iQ_i}(i=1,2,3)$中一定有一个不大于$\frac{1}{3}$，也一定有一个不小于$\frac{1}{3}$，相应地$\frac{PP_i}{PQ_i}=\frac{P_iQ_i}{PQ_i}-1$中一定有一个不小于2，也一定有一个不大于2．

习　题　8

1．用O表示正六边形的中心，考虑绕点A把点B变成O的60°旋转，在此旋转下，线段OC变成线段FE．点K是平行四边形$BCDO$的对角线BD的中点，因此它是对角线CO的中点．这样，点K在所说的旋转下变为点M，从而三角形AMK是正三角形．

2．把正方形$ABCD$绕点A旋转90°，使点B变成点D．设在此旋转下，点M,K分别成为M',K'(则$\angle BMA=\angle DM'A$．因$\angle MAK=\angle MAB=\angle M'AD$，所以$\angle MAD=\angle M'AK$，所以$\angle M'AK=\angle MAD=\angle BMA=\angle DM'A$，即三角形$AKM'$是等腰三角形．所以$AK=KM'=KD+DM'=KD+BM$．

3. 设在三角形ABC中，中线BD又是角平分线．作B关于点D的对称点B_1，由于D是线段AC的中点，四边形$ABCB_1$是平行四边形。由于$\angle ABB_1=\angle B_1BC=\angle AB_1B$，所以三角形$B_1AB$是等腰的，故有$AB=AB_1=BC$．

4. 作出点A关于直线l的对称点A'，设P是l上的点，则$PA+PB=PA'+PB\geqslant A'B$．当且仅当$P$位于$l$和$A'B$的交点时等号成立。于是这个交点是所求的点。

习　题　9

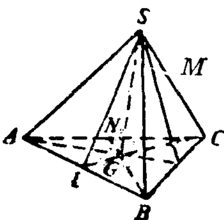
1. $S=\frac{4}{\sqrt{3}}$．　2. $r=1-\frac{\sqrt{6}}{3}$．　3. $R=r(\sqrt{2}-1)$．　4. 三种情况：$341\frac{1}{3}$，768，3072．

习　题　10

1. (1) 证明性质(1)．如图 8-1，由于SA_0垂直于平面SBC，则$SA_0\perp SB$，由SC_0垂直于平面SAB，则$SC_0\perp SB$，于是SB垂直于平面SA_0C_0．同理可证SC垂直于平面SA_0B_0，SA垂直于平面SB_0C_0．由定义即知三面角S-ABC是S-$A_0B_0C_0$的补三面角，所以它们互补。
(2) 证明性质(2)．由$SB_0\perp SC$，$SC_0\perp SB$，即得

$$\angle BSC+\angle B_0-SA_0-C_0=\pi.$$

2. (1) 先证明二面角的平分面是到二面角的两个面的等距离的点的轨迹。然后用三角形内心证明的相同方法即可证得．
(2) 如图，在三面角S-ABC中，令$SA=SB=SC$，则每个面角的平分线都垂直平分AB，BC，CA，设其分点分别为L,M,N．在$\triangle ABC$中，AM,BN,CL是三边上的中线，则交于一点G，所设的三个平面SAM，SBN，SCL必相交于一直线SG．



(第2(2)题)

(3) 完全类似于(2)的证明，要用到三角

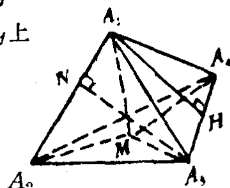
形外心的定理.

3. 如图. 设所给四面体为 $A_1A_2A_3A_4$, 令四个面的三角形面积均为 S. 由 A_1 引 $\triangle A_2A_3A_4$ 的垂线 A_1M, 其垂足为 M, 连 A_2M, A_3M 和 A_4M, 设棱 A_iA_j 上的角为 θ_{ij}, $1\leqslant i<j\leqslant 4$, 由于

$$\triangle MA_2A_3=S\cos\theta_{23},$$

$$\triangle MA_3A_4=S\cos\theta_{34},$$

$$\triangle MA_2A_4=S\cos\theta_{24},$$



(第3题)

则有 $$\cos\theta_{23}+\cos\theta_{34}+\cos\theta_{24}=1, \quad (1)$$

同样有 $$\cos\theta_{13}+\cos\theta_{34}+\cos\theta_{14}=1, \quad (2)$$

$$\cos\theta_{12}+\cos\theta_{24}+\cos\theta_{14}=1, \quad (3)$$

$$\cos\theta_{12}+\cos\theta_{23}+\cos\theta_{15}=1. \quad (4)$$

容易求得, 例如(1)+(2)−(3)−(4), 有

$$\cos\theta_{12}=\cos\theta_{34},$$

所以 $$\theta_{12}=\theta_{34},$$

同理得 $$\theta_{23}=\theta_{14},\ \theta_{13}=\theta_{24}.$$

由于各顶点所引的四面体的高均相等. 设为 h, 设 A_1H 和 A_3N 分别是 $\triangle A_1A_3A_4$ 和 $\triangle A_1A_2A_3$ 的高, 则

$$A_1H=h/\cos\theta_{34},\ A_3N=h/\cos\theta_{12}.$$

所以 $A_1H=A_3N$, 从而 $A_1A_2=A_3A_4$.

同理 $A_2A_3=A_1A_4$, $A_1A_3=A_2A_4$.

这样一来, 显然得到四个面全等.

习 题 11

1. 因为该函数是奇函数, 所以 y 在 $(-\infty, 0]$ 与 $[0, +\infty)$ 上具有相同的单调性.

当 $x>0$ 时, $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$,

x^2 递增 $\longrightarrow \dfrac{1}{x^2}$ 递减 $\longrightarrow 1+\dfrac{1}{x^2}$ 递减 $\longrightarrow \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 递减 $\longrightarrow$

$\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$递增$\longrightarrow\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$递增.

当 $x\leqslant 0$ 时，$y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$也是递增的.

所以，函数 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$在$(-\infty,\ +\infty)$内是递增的.

2. $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$的定义域为 $X=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$,对任意$x\in X$,

都有 $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\geqslant 0$，所以函数有下界 0，显然，函数在整个定义域内无上界，所以是无界函数.

3. 设 $f(x)=ax+b$，则

$f^{[2]}(x)=f(f(x))=a^2x+ab+b$,

$f^{[3]}(x)=f(f^{[2]}(x))=a^3x+(a^2b+ab+b)$,

由已知 $f^{[3]}(x)=8x+7$，得

$a^3=8$，$a=2$,

代入 $a^2b+ab+b=7$，得

$4b+2b+b=7$，$b=1$

故 $f(x)=2x+1$.

4. (1) $A=\left(-\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$.　　(2) $B=[0,\ +\infty)$.

(3) $D=\left(-\dfrac{1}{2},\ 5\right]$.　　(4) $E=\{1,\ 7\}$.

(5) $G=D\cap\overline{E}=\left(-\dfrac{1}{2},\ 5\right]\cap\{(-\infty,\ 1)\cup(1,\ 7)\cup(7,\ +\infty)\}=$

$\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)\cup(1,\ 5]$.

5. 记原凸 n 边形的顶点为外点，对角线的交点为内点，则所围成的三角形有下列 4 类:

$A=$\{由三外点为顶点的三角形\},

$B=$\{由二外点、一内点为顶点的三角形\},

$C=$\{由一外点、二内点为顶点的三角形\},

$D=\{$由三内点为顶点的三角形$\}$.

显然 $|A|=C_n^3$.

在 B 类中，将一内点所在的两条对角线所在的四个外点构成一个 5 点组，这个 5 点组构成 4 个 B 中的三角形，即有这样的对应关系：

f：{由任意四个外点组成的凸四边形}，

$\longrightarrow$ {B中的四个三角形}

易证这个映射是双射．所以 $|B|=4C_n^4$.

在 C 类中，把任一三角形的两内点所属的三条对角线标出，可以看出对应着5个外点．这个凸五边形的 5 条对角线全部画出，显然对应着5个 C类的三角形．定义这样一个映射：

f：{任意 5 个外点组成的凸 5 边形}

$\longrightarrow$ {5 个对角线交点所对应的 5 个 C 类三角形}，

易证这个对应是一一对应，所以 $|C|=5C_n^5$.

D类中，任一三角形对应的三个内点对应着三条对角线，对应着 6 个外点，组成一个凸六边形，我们定义一个映射：

f：{任意 6 个外点组成的凸 6 边形}

$\longrightarrow$ {三条主对角线所围成的一个 D 类的三角形}，

易证这个映射是双射，所以 $|D|=C_n^6$.

所以三角形的总数为：$C_n^3+4C_n^4+5C_n^5+C_n^6$.

习 题 12

1．函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数是 $y=\dfrac{b-dx}{cx-a}$，它们的图象完全重合，即是对定义域内的任一实数 x 都有

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{b-dx}{cx-a},$$

或者写成 $(ax+b)(cx-a)=(cx+d)(b-dx)$，即

$$c(a+d)x^2-(a^2-d^2)x-b(a+b)\equiv 0,$$

所以必有 $c(a+d)=0$，$a^2-d^2=0$，$b(a+d)=0$.

这时有以下情况：

(i) $b=c=0$，$d=\pm a$，得 $y=\pm x$.

(ii) $b\neq 0$, $c=0$, $d=-a$, 得 $y=-k-x$.

(iii) $c\neq 0$, $d=-a$, $y=\dfrac{ax+b}{cx-a}$.

综合之，可以得出函数只有两种形式：

$$y=x,\quad y=\frac{ax+b}{cx-a}.$$

2. 因为 $f(3)f(7)=f(21)<f(22)=f(2)f(11)<2f(14)=2f(2)f(7)=4f(7)$,

所以 $f(3)<4$, 但 $f(3)>f(2)=2$, 故 $f(3)=3$.

若命题不真，设使 $f(n)\neq n$ 的最小正整数为 $n_0\geqslant 4$，即 $f(2)=2, f(3)=3,\cdots,f(n_0-1)=n_0-1$，但有 $f(n_0)\neq n_0$. 因为 $f(n_0)>f(n_0-1)=n_0-1$，所以只能有 $f(n_0)>n_0$. 又由 $f(n)$ 严格递增，从而当 $n\geqslant n_0$ 时

$$f(n)>n. \tag{1}$$

下面分两种情况讨论.

(i) 当 n_0 是奇数时，则 2 与 n_0-2 互素，

故 $f(2(n_0-2))=f(2)f(n_0-2)=2(n_0-2)$. (2)

但因 $n_0\geqslant 4$, $2(n_0-2)\geqslant n_0$, (1)与(2)矛盾.

(ii) 当 n_0 是偶数时，2 与 n_0-1 互素，同样有

$f(2(n_0-1))=f(2)f(n_0-1)=2(n_0-1)$, (3)

显然 $2(n_0-1)>n_0$, 从而(1)与(3)矛盾.

综上所述，(1)永远不能成立，于是命题得证.

3. 由 $f(1,n)=f(0,f(1,n-1))=f(1,(n-1))+1$,

及 $f(1,0)=f(0,1)=2$, 得 $f(1,n)=n+f(1,0)=n+2$.

又由 $f(2,n)=f(1,f(2,n-1))=f(2,n-1)+2=2n+f(2,0)$,

$$f(2,0)=f(1,1)=1+2=3,$$

所以
$$f(2,n)=2n+3,$$

再由

$$f(3,n)=f(2,f(3,n-1))=2f(3,n-1)+3=2[f(3,n-1)+3]-3,$$

即有
$$\frac{f(3,n)+3}{f(3,n-1)+3}=2,$$

从而有
$$f(3,n)+3=2^n(f(3,0)+3).$$

因为
$$f(3,0)=f(2,1)=5,$$

所以 $$f(3,n)=2^{n+3}-3.$$

最后我们计算 $f(4,n)$，由

$$f(4,n)=f(3,f(4,n-1))=2^{f(4,n-1)+3}-3,$$

即 $$f(4,n)+3=2^{f(4,n-1)+3}.$$

令 $$t_n=f(4,n)+3,\varphi(x)=2^x,$$

则有 $$t_n=\varphi(t_{n-1}),$$

于是 $$t_n=\varphi^{[n]}(t_0).$$

由于 $$t_0=f(4,0)+3=f(3,1)+3=2^4,$$

所以 $$f(4,n)=\varphi^{[n]}(16)-3.$$

这样一来，得 $f(4,1981)=\varphi^{[1981]}(16)-3=2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}-3$，

其中指数的重数为1984。

习 题 13

1. 左－右$=(1-\sin x)^2+(2-x)\sin x>0$.

2. 由所设有$\frac{1}{4}=\frac{abc}{4R}$（$R$为外接圆半径），故$abc=1$.

$$t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$$

$$\geqslant\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}=\sqrt{c}+\sqrt{a}+\sqrt{b}=S.$$

等号成立的充要条件是$a=b=c(=1)$，但 $a=b=c=1$时三角形面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}\neq\frac{1}{4}$. 故 $t>S$，选(C).

3. 由算术平均 几何平均不等式，有

$$2^{x^{1/12}}+2^{x^{1/4}}\geqslant 2\left(2^{x^{1/12}}\cdot 2^{x^{1/4}}\right)^{1/2}$$

$$=2\cdot 2^{\frac{x^{1/12}+x^{1/4}}{2}}.$$

又 $$\frac{x^{1/12}+x^{1/4}}{2}\geqslant(x^{1/12}\cdot x^{1/4})^{1/2}=x^{1/6}.$$

由这两个不等式及指数函数 2^x 的递增性，而得要证的不等式.

4. 反设 $a+b>2$，则 $a>2-b$. 从而

$$a^3+b^3>(2-b)^3+b^3=6(b-1)^2+2>2.$$

5. 左－右$>0\Longleftrightarrow \lg^2(n+1)-\lg n\cdot\lg(n+2)>0$.

而 $$\lg(n+1)^2>\lg n(n+2)>2\sqrt{\lg n\cdot\lg(n+2)},$$

故 $$\lg(n+1)>\sqrt{\lg n\cdot\lg(n+2)}.$$

6. 由和差化积公式，有

$$\sin A+\sin B+\sin C+\sin\frac{A+B+C}{3}$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B+4C}{6}\cos\frac{2C-A-B}{6}$$
$$\leqslant 2\left(\sin\frac{A+B}{2}+\sin\frac{A+B+4C}{6}\right)$$
$$=4\sin\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{A+B-2C}{6}\leqslant 4\sin\frac{A+B+C}{3},\qquad(1)$$

故 $$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\leqslant\sin\frac{A+B+C}{3}.$$

(1)中第一个不等式成立等号的充要条件是 $A=B$ 及 $2C=A+B$；第二个不等号当且只当 $A+B-2C=0$ 时成立等号．故原不等式当且只当 $A=B=C$ 时成立等号．

7. 因 $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k=0$，故

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right|=\frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}(2a_k-a_n-a_1)x_k\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}|2a_k-a_n-a_1|\cdot|x_k|.\qquad(1)$$

若能证 $$|2a_k-a_n-a_1|\leqslant a_1-a_n,\qquad(2)$$

则由(1)有 $$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\right|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_1-a_n)|x_k|=\frac{1}{2}(a_1-a_n).$$

而 $$(2)\Longleftrightarrow\pm(2a_k-a_n-a_1)<a_1-a_n$$
$$\Longleftrightarrow a_k\leqslant a_1,\ a_n\leqslant a_k.$$

习 题 14

1. 用归纳法．$n=1$ 时显然成立．设 $n=k$ 时不等式成立，两边乘以 $\frac{3k+1}{3k+2}$，然后证明：

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3k+1}}\cdot\frac{3k+1}{3k+2}<\frac{1}{\sqrt[3]{3k+4}}.$$

2. 二次函数$f(x)=2x(1-x)=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$是一条开口朝下的抛物线，其最大值为$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，且$f(0)=f(1)=0$. 因$0<a<1$，故$0<a_1=f(a)\leqslant\frac{1}{2}$，设$0<a_k\leqslant\frac{1}{2}$，则又有$0<a_{k+1}=f(a_k)\leqslant\frac{1}{2}$. 即对一切$n\in N$，有$0<a_n\leqslant\frac{1}{2}$. 所以

$$a_{n+1}-a_n=2a_n(1-a_n)-a_n=a_n(1-2a_n)\geqslant 0.$$

3. 设 $f(x)=1+x-\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}$，则 $x_{n+1}=f(x_n)$. 易知当 $x\geqslant 1$ 时 $f(x)$是减函数，于是，由 $1<x_1<2$，得$1=f(2)<f(x_1)=x_2<f(1)=\frac{3}{2}$，又由此得

$$\frac{11}{8}=f\left(\frac{3}{2}\right)<f(x_2)=x_3<f(1)=\frac{3}{2},$$

所以 $$-\frac{1}{8}<\frac{11-8\sqrt{2}}{8}<x_3-\sqrt{2}<\frac{12-8\sqrt{2}}{8}<\frac{1}{8}.$$

即$|x_8-\sqrt{2}|<\frac{1}{8}$. 故$n=3$时命题成立. 设

$$|x_k-\sqrt{2}|<2^{-k},$$

则$|x_{k+1}-\sqrt{2}|=\left|1+x_k-\frac{1}{2}x_k^2-\sqrt{2}\right|=\frac{1}{2}|(x_k-\sqrt{2})(x_k+\sqrt{2}-2)|\leqslant\frac{1}{2}|x_k-\sqrt{2}|\left(2\sqrt{2}-2+\frac{1}{8}\right)<\frac{1}{2}|x_k-\sqrt{2}|<2^{-(k+1)}.$

4. 令 $A=a_1c_1-b_1^2=a_2c_2-b_2^2$，则

左边$=2A+2b_1b_2-a_1c_2-a_2c_1\leqslant 2A+2b_1b_2-2\sqrt{a_1a_2c_1c_2}$.

又 $a_1c_1a_2c_2=(A+b_2^1)(A+b_2^2)=A^2+b_1^2b_2^2+(b_1^2+b_2^2)A$

$$\geqslant A^2+b_1^2b_2^2+2b_1b_2A=(A+b_1b_2)^2,$$

所以 左边$\leqslant 2A+2b_1b_2-2(A+b_1b_2)=0$.

5. 令 $x=\cos^2\varphi$，则

左$=m^2\csc^2\varphi+n^2\sec^2\varphi=(m^2+n^2)+(m^2\text{ctg}^2\varphi+n^2\text{tg}^2\varphi)$

$\geqslant m^2+n^2+2mn=(m+n)^2$.

6. 令 $a+b=c+\delta(\delta>0)$.

7. 令$x=a+\delta$，$y=a-\delta$(设$x\geqslant y$)，则$\dfrac{x+y}{2}=a\geqslant 0$，$\dfrac{x-y}{2}=\delta\geqslant 0$.

所以左$=\dfrac{1}{2}\left[(a+\delta)^n+(a-\delta)^n\right]=a^n+c_n^2a^{n-2}\delta^2+c_n^4a^{n-4}\delta^4+\cdots$

$\geqslant a^n=$右.

8. 令 $f(x)=(b+c)x+bc+1$，则左－右$=f(a)$，又$f(1)=(1+b)(1+c)>0$，$f(-1)=(1-b)(1-c)>0$. 因 $f(x)$是一次函数，所以，对 $-1<a<1$，有 $f(a)>0$.

9. 设$y=a\sec\theta-b\operatorname{tg}\theta=a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}-b\operatorname{tg}\theta$，则

$$(a^2-b^2)\operatorname{tg}^2\theta-2by\operatorname{tg}\theta+a^2-y^2=0.$$

因 $\operatorname{tg}\theta\in k$，故$\triangle=(-2by)^2-4(a^2-b^2)(a^2-y^2)\geqslant 0$. 解得

$$y\geqslant\sqrt{a^2-b^2}\text{或}y\geqslant-\sqrt{a^2-b^2}.$$

因θ为锐角，只能有 $y\geqslant\sqrt{a^2-b^2}$.

10. 当 n 个比值相等时，显然等号成立.若它们不全相等，不妨设$\dfrac{b_1}{a_1}\neq\dfrac{b_2}{a_2}$，

即$\dfrac{a_1}{b_1}b_2-a_2\neq 0$. 令

$$f(x)=(b_1x-a_1)^2-(b_2x-a_2)^2-\cdots-(b_nx-a_n)^2,$$

易知 $f\left(\dfrac{a_1}{b_1}\right)<0$. 所以判别式$\triangle>0$，此即要证的不等式.

习 题 15

1. (1) 不妨设 $a>b>0$，则 $\lg a>\lg b$. 从而

$$a\lg a+b\lg b>a\lg b+b\lg a.$$

(2) 设$a\geqslant b\geqslant c>0$，则$\lg a\geqslant\lg b\geqslant\lg c$. 所以

$$a\lg a+b\lg b+c\lg c\geqslant b\lg a+c\lg b+a\lg c,$$

$$a\lg a+b\lg b+c\lg c\geqslant c\lg a+a\lg b+b\lg c,$$

再把两式相加.

(3) 证法与(2)同.

(4) 设$a\geqslant b\geqslant c>0$，则$\dfrac{1}{b+c}\geqslant\dfrac{1}{c+a}\geqslant\dfrac{1}{a+b}$. 以下仿(2)证.

(5) 设$a\geqslant b\geqslant c>0$，则$a^{12}\geqslant b^{12}\geqslant c^{12}$，$\frac{1}{bc}\geqslant\frac{1}{ca}\geqslant\frac{1}{ab}$．所以

$$\frac{a^{12}}{bc}+\frac{b^{12}}{ca}+\frac{b^{12}}{ab}\geqslant\frac{a^{12}}{ca}+\frac{b^{12}}{ab}+\frac{c^{12}}{bc}=\frac{a^{11}}{c}+\frac{b^{11}}{a}+\frac{c^{11}}{b}.$$

又由$a^{11}\geqslant b^{11}\geqslant c^{11}$，$\frac{1}{c}\geqslant\frac{1}{b}\geqslant\frac{1}{a}$，可得

$$\frac{a^{11}}{c}+\frac{b^{11}}{a}+\frac{c^{11}}{b}\geqslant a^{10}+b^{10}+b^{10}.$$

2．由 $A_n\geqslant G_n$ 即得．

3．由二项式定理，得

$$左=2^n-1=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$$

再对上式右边和式应用 $A_n\geqslant G_n$，并注意此时不等号应成立．

4．因$\frac{d}{a_k}=\frac{a_{k+1}}{a_k}-1$，故

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k}-n>n\sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_1}}-n.$$

两边除以 d 得第一个不等式．第二个不等式，利用

$$\frac{d}{a_k}=1-\frac{a_{k-1}}{a_k}$$

可类似证明．

6．由$A_n\geqslant G_n$，得 左$<\left(1-\frac{13}{365}\right)^{25}$．再证明

$$C_{25}^{k}\left(\frac{13}{365}\right)^{k}>C_{25}^{k+1}\left(\frac{13}{365}\right)^{k+1}.$$

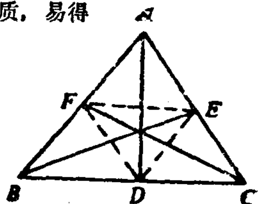
所以
$$\left(1-\frac{13}{365}\right)^{25}=1-\left[C_{25}^{1}\frac{13}{365}-C_{25}^{2}\left(\frac{13}{365}\right)^{2}\right]$$
$$-\left[C_{25}^{3}\left(\frac{13}{365}\right)^{3}-C_{25}^{4}\left(\frac{13}{365}\right)^{4}\right]-\cdots-\left(\frac{13}{365}\right)^{25}$$
$$<1-C_{25}^{1}\frac{13}{365}+C_{25}^{2}\left(\frac{2}{365}\right)^{2}<\frac{1}{2}.$$

7．$左=\sum_{k=1}^{n}1\cdot\sqrt{C_n^k}\leqslant(1+1+\cdots+1)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}C_n^k\right)^{1/2}$
$=\sqrt{n(2^n-1)}$.

习 题 16

1. 如图. 由三角形角平分线的性质及比例性质，易得

$$\frac{AF}{AB}=\frac{b}{a+b},\quad \frac{AE}{AC}=\frac{c}{a+c}.$$



（第1题）

所以 $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\dfrac{bc}{(a+b)(a+c)}$.

同理 $\dfrac{S_{BDF}}{C_{ABC}}=\dfrac{ca}{(b+c)(b+a)}$.

$\dfrac{S_{CED}}{S_{ABC}}=\dfrac{ab}{(c+a)(c+b)}$.

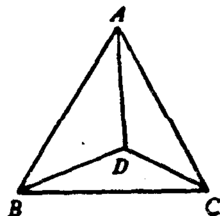
欲证不等式等价于

$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}\geqslant\frac{3}{4}$$

$$\Longleftrightarrow a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b\geqslant 6abc.$$

这个不等式易证.

2. 如图 由于三角形三内角和为180^0，而$\angle ADC>\angle ADB$，所以$\angle BAD>\angle CAD$或$\angle ABD>\angle ACD$至少有一个成立. 若$\angle BAD>\angle CAD$. 因$AB=AC$，$AD=AD$，故$BD>CD$；若$\angle ABD>\angle ACD$，因$\angle ABC=\angle ACB$，故$\angle DBC<\angle DCB$，从而$BD>CD$.



（第2题）

3. 如图 不妨设 $AB\geqslant CD$（否则对换 A, B 与 C, D）. 原不等式等价于

$AE+ED+AB-CD>BE+CE$.

在 AB 上取点 A'，使 $A'B=CD$. $AE+AB\geqslant A'E+A'B$. 于是

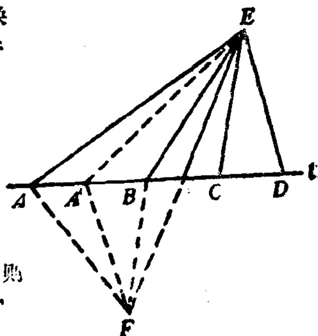
左边$\geqslant A'E+ED+A'B-CD$

$=A'E+ED$.

设F是E关于线段$A'D$中点的对称点，则

$A'E+ED=A'E+A'F>BE+BF$

$=BE+CE$.



（第3题）

4. 取圆的直径PQ，则$PA_k+QA_k\geqslant PQ=2(k=1, 2, \cdots, n)$。从而

$$(PA_1+PA_2+\cdots+PA_n)+(QA_1+QA_2+\cdots+QA_n)\geqslant 2n.$$

由此易知 P，Q 中至少有一点为所求。

5. (1) 左－右$=\frac{1}{4R^2}(pa^2+pb^2-pqc^2)$，而$pa^2+qb^2-pqc^2>pa^2+pb^2-pq(a+b)^2=(pa-qb)^2\geqslant 0$.

(2) 左－右$=(x-y\cos C-z\cos B)^2+y^2\sin^2C+z^2\sin^2B+2yz\cos(B+C)-2yz\cos B\cos C\geqslant(y\sin C-z\sin B)^2\geqslant 0$.

等号当且只当 $x=y\cos C+z\cos B$，$y\sin C=z\sin B$时成立．这个条件还可以改写成 $x=k\sin A$，$y=k\sin B$，$y=k\sin C$(k为常数)。

(3) 因$\triangle=\frac{abc}{4R}$，故第一个不等式$\Longleftrightarrow a^2+b^2+c^2\leqslant 9R^2\Longleftrightarrow\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C\leqslant\frac{9}{4}$(本讲例8)。第二个不等式由$A_3\leqslant Q_3$即得。

(4) 左$=\dfrac{\sin^2\frac{B+C}{2}-\sin^2\frac{B-C}{2}}{\sin A}\leqslant\dfrac{\sin^2\frac{B+C}{2}}{\sin A}=$右。

(5) 令$y=\sin A\sin\frac{A}{2}=2\sin^2\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$，则

$$y^2=2\left[\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{A}{2}\cdot 2\cos^2A\right].$$

应用$G_3\leqslant A_3$，得 $y^2\leqslant\frac{16}{27}$，所以$y\leqslant\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

6. 这是埃德斯-莫德尔不等式P点在边上的情形。

7. 把埃德斯-莫德尔不等式中的P点取为I。

习 题 17

1. $a'^2<(c+a)^2+(a+b)^2<a^2+b^2+a^2+c^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}=(c'+b')^2$．故$a'<c'+b'$.

2. (1) 因$c>|b-a|$，即$\frac{2\triangle}{h_c}>\left|\frac{2\triangle}{h_b}-\frac{2\triangle}{h_a}\right|$，所以$h_c<\frac{h_bh_a}{|h_a-h_b|}=\frac{20\times 12}{8}=30$.

(2) $\frac{1}{A^2}+\frac{1}{B^2}+\frac{1}{C^2}\geqslant\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}+\frac{1}{CA}=\frac{\pi}{ABC}$.

又$ABC\leqslant\left(\frac{A+B+C}{3}\right)^3=\frac{\pi^3}{27}$.

(3) 令O为外接圆圆心，A_1,B_1,C_1分别为BC,CA,AB的中点，$m_a=AA_1\leqslant AO+OA_1=R+OA_1$. 同理，$m_b\leqslant R+OB_1$，$m_c\leqslant R+OC_1$. 于是

左边$\leqslant R\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)+\frac{OA_1}{h_a}+\frac{OB_1}{h_b}+\frac{OC_1}{h_c}$.

再由$\frac{2\triangle}{r}=a+b+c=\frac{2\triangle}{h_a}+\frac{2\triangle}{h_b}+\frac{2\triangle}{h_c}$，得$\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$. 又由$2\triangle=a\cdot OA_1+b\cdot OB_1+c\cdot OC_1=\frac{2\triangle}{h_a}\cdot OA_1+\frac{2\triangle}{h_b}\cdot OB_1+\frac{2\triangle}{h_c}\cdot OC_1$,有$\frac{OA_1}{h_a}+\frac{OB_1}{h_b}+\frac{OC_1}{h_c}=1$.

(4) 分角线$t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$. 由$\frac{2}{b+c}\sqrt{bc}\leqslant1$，有$t_a\leqslant\sqrt{p(p-a)}$. 于是

$t_a+t_b+t_c\leqslant\sqrt{p}(1\cdot\sqrt{p-a}+1\cdot\sqrt{p-b}+1\cdot\sqrt{p-c})$

$\leqslant\sqrt{p}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{3}p$.

(5) 用变量代换法.

(6) 不妨设$a\leqslant b\leqslant c$，则$A\leqslant B\leqslant C$，从而

$$S=aA+bB+cC\geqslant S_1=aB+bC+cA,$$

$$S\geqslant S_2=aC+bA+cB.$$

所以 $3S\geqslant S+S_1+S_2=(a+b+c)(A+B+C)=\pi(a+b+c)$.

此即第一个不等式. 注意$\cos A\geqslant\cos B\geqslant\cos C$，仿上用排序不等式可证第二个不等式.

第一个不等式还可证明如下：易知

$(a-b)(A-B)\geqslant0,(b-c)(B-C)\geqslant0,(c-a)(C-A)\geqslant0$.

三式相加展开即得. 第二个不等式可类似地证明(注意$(a-b)\cdot(\cos A-\cos B)\leqslant0$).

(7) 设A是$\triangle ABC$最大角，若$\triangle ABC$是锐角三角形. 则$60^\circ\leqslant A<90^\circ$. 因$h_b\leqslant t_b\leqslant1$，$h_c\leqslant t_c\leqslant1$，故$\triangle=\frac{1}{2}h_c\cdot AB=\frac{1}{2}h_c\cdot\frac{h_b}{\sin A}$

$<\frac{1}{\sqrt{3}}$.

若$\triangle ABC$非锐角三角形，则$AC\leqslant t_c<1$，$AB\leqslant t_b<1$. 所以$\triangle\leqslant\frac{1}{2}AB\cdot AC<\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(8)，(9)用变量代换法.

3. ⇐易证. ⇒：

$$2S=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2\geqslant OA\cdot OB+OB\cdot OC+OC\cdot OD$$
$$+OD\cdot OA\geqslant 2[S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCD}+S_{\triangle ODA}]=2S.$$

4. 设$S,S_1,S_2,\cdots,S_n$分别为正方形及分割所得各矩形的面积，$T,T_1,T_2,\cdots,T_n$是正方形及各矩形的外接圆面积. 先证明：$S_k\leqslant\frac{2}{\pi}T_k$，事实上，设矩形边长为$a,b$，则$S_k=ab,T_k=\pi k^2$，这里$k^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}$，从而$S_k=ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{2}{\pi}(\pi k^2)=\frac{2}{\pi}T_k$. 所以

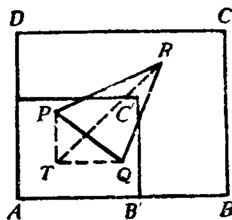
$$\frac{2}{\pi}T=S=S_1+S_2+\cdots+S_n\leqslant\frac{2}{\pi}(T_1+T_2+\cdots+T_n).$$

5. 如图，以PQ为斜边，在$\triangle PQR$外侧作$Rt\triangle PQT$，使两直角边分别平行于矩形的两邻边.

(1) 若RT与PQ相交(如图)，记$PT=\varepsilon$，$TQ=\delta$，则

$$S_{\triangle PQR}=S_{\triangle TPR}+S_{\triangle TQR}-S_{\triangle PQT}$$
$$\leqslant\varepsilon a+\delta b-\varepsilon b=ab-(a-\delta)(b-\varepsilon)$$
$$\leqslant ab-(a-\lambda a)(b-\mu b)$$
$$=ab(\lambda+\mu-\lambda\mu).$$

(2) 若PT与PQ相交(下略).



(第5题)

习 题 18

1. 配方得

$$f(x,\ y)=(2x+y-1)^2+3(y-2)^2+5.$$

当$x=-\frac{1}{2}$，$y=2$时$f_{\min}=5$.

2。$3+x-2x^2=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{8}$，分两种情况：

(1) 当$a^2-a-2>1$，即 $a>\frac{1+\sqrt{13}}{2}$或$a<\frac{1-\sqrt{13}}{2}$时，$y_{max}=\log_{a^2-a-1}\frac{25}{8}$，$y_{min}$不存在。

(2) 当$0<a^2-a-1<1$，即$\frac{1-\sqrt{13}}{2}<a<-1$或$2<a<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$时，$y_{min}=\log_{a^2-a-2}\frac{25}{8}$，$y_{max}$不存在。

3．将$y=u-x$代入已知方程，利用判别式解得$u\geqslant 3\sqrt{2}$．当$x=y=\frac{3\sqrt{2}}{2}$时，$u_{max}=3\sqrt{2}$．

4．将原式变为 $\sin^2 2\theta+4(1-y)\sin 2\theta+4=0$，解得 $\sin 2\theta=2(y-1\pm\sqrt{y^2-2y})$．由$0<\sin 2\theta\leqslant 1$，考虑不等式组

$$\begin{cases}y^2-2y\geqslant 0,\\ 0<2\left(y-1\pm\sqrt{y^2-2y}\right)\leqslant 1.\end{cases}$$

可求得 $y_{min}=2\frac{1}{4}$．

5．把y改写成 $y=2-\frac{3}{2+\sin x}$，由$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，求得 $y_{max}=1$，$y_{min}=-1$．

6．设$x=r\sin\theta$，$y=r\sin\theta$．则$1\leqslant t^2\leqslant 4$．

$$u=t^2\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right).$$

由$-1\leqslant\sin 2\theta\leqslant 1$，得$\frac{1}{2}\leqslant u\leqslant 6$．从而 $u_{min}=\frac{1}{2}\left(当 x=\frac{\sqrt{2}}{2}，y=-\frac{\sqrt{2}}{2}时\right)$，$u_{max}=6$(当$x=2$，$y=2$时)．

7．题设条件是：$z_1=r_1(\cos\theta+i\sin\theta)$，$z_2=r_2(\cos\theta-i\sin\theta)$，$s=\frac{1}{2}\cdot r_1r_2\sin 2\theta$．

设$\triangle OZ_1Z_2$的重心是z，则$3z=z_1+z_2$．所以

$$9|z|^2=|z_1+z_2|^2=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$=(r_1-r_2)^2+4r_1r_2\cos^2\theta$$

$$=(r_1-r_2)^2+4s\,\mathrm{ctg}\theta.$$

从而当$r_1=r_2=\sqrt{\frac{2s}{\sin 2\theta}}$时，$|z|_{\min}=\frac{2}{3}\sqrt{s\,\mathrm{ctg}\theta}$.

习 题 19

1. 由$A_5\geqslant G_5$，得

$$y=\sqrt{5x+6}+\sqrt{5x+6}+\sqrt{5x+6}+\sqrt{5x+6}+\frac{1}{(5x+6)^2}\geqslant 5.$$

等号当且仅当$\sqrt{5x+6}=\frac{1}{(5x+6)^2}$时成立，即$x=-1$时，$y_{\min}=5$.

2. $y^2=\frac{1}{2}(\sin^2\theta)(\sin^2\theta)(2\cos^2\theta)$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\theta+\sin^2\theta+2\cos^2\theta}{3}\right)^3=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{3^3}.$$

等号当且仅当$\sin^2\theta=2\cos^2\theta$时成立，即$\theta=\mathrm{arctg}\sqrt{2}$时，

$$y_{\min}=\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

3. (1) $a^2-(x^2+y^2+z^2)=2(xy+yz+zx)$，又

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx.$$

两式相加得$xy+yz+zx\leqslant\frac{a^2}{3}$. 等号当且仅当$x=y=z$时成立。

即$x=y=z=\frac{a}{3}$时，$(xy+yz+zx)_{\max}=\frac{a^2}{3}$.

(2) $$\frac{x^m}{m^m}\cdot\frac{y^n}{n^n}\cdot\frac{z^p}{p^p}\leqslant\left(\frac{m\cdot\frac{x}{m}+n\cdot\frac{y}{n}+p\cdot\frac{z}{p}}{m+n+p}\right)^{m+n+p}$$

$$\leqslant\left(\frac{a}{m+n+p}\right)^{m+n+p},$$

即 $$x^my^nz^p\leqslant m^mn^np^p\left(\frac{a}{m+n+p}\right)^{m+n+p}.$$

等号当且仅当$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$时成立，即$x=\frac{ma}{m+n+p}$，$y=\frac{na}{m+n+p}$，$z=\frac{pa}{m+n+p}$时，

$$(x^m y^n z^p)_{\max} = m^m n^n p^p \left(\frac{a}{m+n+p} \right)^{m+n+p}.$$

4．设$BP=x$，$CQ=y$，$AR=z$．问题可归结为在条件$x+y+z=a$下，求

$$S_{PQR}=\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx)$$

的最大值（见第 3 题(1)）．

5．先证明，三角形的一边长为a及周长$a+b+c$都是定值，则以等腰三角形的面积为最大．

事实上，$S=\sqrt{p(p-a)}\cdot\sqrt{(p-b)(p-c)}$

$$\leqslant\sqrt{p(p-a)}\cdot\frac{(p-b)+(p-c)}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{p(p-a)}.$$

等号当且仅当$b=c$时成立，

再固定$\triangle ABC$，让D点变动，使$AD+DC$为定值，由上述命题知，对面积最大的四边形，必有$AD=DC$．仿此，推断出$ABCD$是菱形，最后证明$ABCD$是正方形．

6．令$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，可求得最大值为$\frac{5}{2}$．

7．令$x=\sin\alpha$，$y=\cos\beta$，可求得最大值为1．

8．$k=\frac{y}{x}=\frac{0-y}{0-x}$是原点到圆上点的斜率．$k_{\max}=3+\sqrt{2}$．

9．设每天生产甲、乙产品的件数是x，y．由于设备A的转动时数每天最多 12 小时，故$2x+2y\leqslant12$．这样，问题归结为在约束条件组

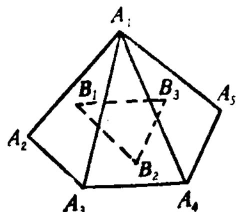
$$2x+2y\leqslant12,\ x+2y\leqslant8,\ 4x\leqslant16,$$
$$4y\leqslant12,\ x,\ y\geqslant0.$$

下，求$2x+3y$（百元）的最大值．答案为$(2x+3y)_{\max}=14$（百元），在点(4，2)达到．即每天生产 4 件甲产品，生产 2 件乙产品．

习　题　20

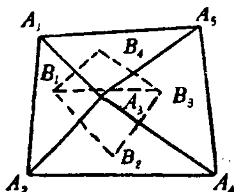
1．设A中含有 5 个点A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，考虑这 5 个点的凸包．

(1) 如果凸包为五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，考虑$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle A_1A_3A_4$，$\triangle A_1A_4A_5$，如果其中有一个不含集合 B 中的点，则这个三角形即为所求. 如果它们分别含有 B 中的点 B_1，B_2，B_3，则$\triangle B_1B_2B_3$即为所求(如图).



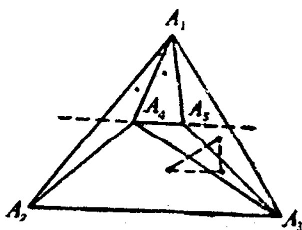
(第1(1)题)

(2) 如果凸包为四边形，设 A_3 在四边形$A_1A_2A_4A_5$ 的内部，考虑$\triangle A_3A_1A_2$，$\triangle A_3A_2A_4$，$\triangle A_3A_4A_5$，$\triangle A_3A_5A_1$，如果其中一个三角形不含集合 B 中的点，则这个三角形即为所求. 如果它们分别含有集合B中的点B_1，B_2，B_3，B_4，那么$\triangle B_1B_2B_3$和$\triangle B_1B_3B_4$中必有一个不含A_3，这个三角形即为所求(如图).



(第1(2)题)

(3) 凸包为三角形，设A_4，A_5在$\triangle A_1A_2A_3$的内部，考虑 5 个三角形 $\triangle A_1A_2A_4$，$\triangle A_1A_4A_5$，$\triangle A_1A_5A_3$，$\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_1A_5$. 如果其中一个三角形不含集合 B 中的点，这个三角形即为所求. 如果每个三角形中各有一点属于 B，那么必有三点在直线A_4A_5的同一侧，这三点构成的三角形即为所求(如图).



(第1(3)题)

如果 A 中的点数超过 5，我们先取两点A_1，A_2，作射线 A_1A_2，任取一点 $A_i\in A$，作角$A_2A_1A_i$，$\angle A_2A_1A_i$ 的大小是以 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 为正向的逆时针的旋转角而定(取 360^0 之内的). 设$\angle A_2A_1A_i=\theta_i$，$\theta_3<\theta_4<\theta_5<\cdots$，则取$A_1$，$A_2$，$A_3$，$A_4$，$A_5$ 即可，此时它们的凸包不含A中的其他点.

2. 设六点集为$Z=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$，如果发生下面两种情况:

① Z中有三点在一直线上. 例如A_1，A_2，A_3在同一直线上，A_2 在线

段A_1A_3上，并且$A_1A_2 \leqslant A_2A_3$，则有$\lambda_6 \geqslant \frac{A_1A_3}{A_1A_2} \geqslant 2 > \sqrt{3}$.

② Z 中有三点构成三角形的三个顶点，而这三角形的一个内角不小于$120°$.例如，在$\triangle A_1A_2A_3$中，$\angle A_1A_2A_3 \geqslant 120°$，并且$A_2A_3 \geqslant A_1A_2$，则有

$$A_1A_3^2 = A_1A_2^2 + A_2A_3^2 - 2A_1A_2 \cdot A_2A_3 \cos\angle A_1A_2A_3$$
$$\geqslant A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_1A_2 \cdot A_2A_3 \geqslant 3A_1A_2^2.$$

于是得到$\lambda_6 \geqslant \frac{A_1A_3}{A A_2} \geqslant \sqrt{3}$.

现在证明集合Z一定具有①，②两性质之一．设 Z 不具备性质①，则必具备性质②.

对Z的凸包进行讨论.

(1) 凸包是$\triangle A_1A_2A_3$，则$\angle A_1A_4A_2$，$\angle A_2A_4A_3$，$\angle A_3A_4A_1$中至少有一个不小于$120°$，所以，$\triangle A_1A_4A_2$，$\triangle A_2A_4A_3$，$\triangle A_3A_4A_1$中至少有一个具备性质②，即Z具备性质②.

(2) 凸包是四边形$A_1A_2A_3A_4$，则A_5必在$\triangle A_1A_2A_3$和$\triangle A_1A_3A_4$之一中，由(1)讨论可知Z具备性质②.

(3) 凸包是五边形$A_1A_2A_3A_4A_5$，A_6必在三个三角形$A_1A_2A_3$，$A_1A_3A_4$，$A_1A_4A_5$之一的内部，由(1)讨论可知Z具备性质②.

(4) 凸包为六边形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，由于 6 个内角之和为$720°$，则必有一个内角$\geqslant 120°$，因此，Z具备性质②.

总之，集合Z必具备①，②两性质之一，所以结论总能成立.

3．设这四个圆为$\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$，$\odot O_4$.设 A_1 为$\odot O_2$，$\odot O_3$，$\odot O_4$的公共点，A_2 为$\odot O_1$，$\odot O_3$，$\odot O_4$ 的公共点，A_3 为$\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_4$ 的公共点，A_4 为$\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$ 的公共点.

如果这 4 个点不同，考虑其凸包….

习 题 21

1．本题实际上是计算题．以A为坐标原点，AB所在的直线为x轴，假设三角形边长为2，建立直角坐标系．不难求出$B(2,0)$，$C(1,\sqrt{3})$，内切圆方程是

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{3}. \qquad (1)$$

设$P(x_0, y_0)$是内切圆上任意一点，则

$$|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2=3\left(x_0^2+y_0^2-2x_0-\frac{2\sqrt{3}}{3}y_0\right)+8.$$

由于P的坐标适合(1)式，因此上面右端的值是5，这和P点无关。

2. 很明显，两平行线之间距离是$\frac{|6-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$，设所求直线与直线$4x+3y+1=0$及$4x+3y+6=0$的交点分别是$A$，$B$。过$A$作另一直线的垂线，$C$是垂足，则显然$\angle ABC=45°$。如果$k$是所求直线的斜率，则有

$$\left|\frac{k-\left(-\frac{4}{3}\right)}{1+k\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)}\right|=1,$$

从而$k=-\frac{1}{7}$或者7。所求直线方程为$x+7y-15=0$，或者$7x-y-5=0$。

3. 如果A在抛物线上，则A就是所求的点。对于抛物线上异于A的点B，总有$|AB|+|BF|>|AF|$。
如果A在抛物线外部，同样的道理可知AF和抛物线的交点是所求的点。
如果A在抛物线内部，作出抛物线的准线。B到F的距离等于B到准线的距离，这样易见A向准线所作垂线与抛物线的交点为所求。

4. 以长轴为直径的圆的半径为a，圆心在原点O，设以PF_2为直径的圆心为Q，连结OQ，则OQ是三角形F_1F_2P中的中位线，于是$|OQ|=\frac{1}{2}|PF_1|$。又两圆半径之差是$a-\frac{1}{2}|PF_2|$。
但P是椭圆上一点，按定义有$|PF_1|+|PF_2|=2a$，即$a-\frac{1}{2}|PF_2|=\frac{1}{2}|PF_1|$，
从而两圆圆心距等于半径之差，故相切。

习　题　22

1．不难看出l_1，l_2，l_3是两两相交的，要证明相交于一点，可设法把其中一个方程写成另两个方程的线性组合．观察可得到，l_1方程的3倍加上l_2方程的(-1)倍，即是l_3的方程．

2．建立直角坐标系，取C_1为原点，AB所在的直线为x轴．设$A(a,0)$，$B(b,0)$，$C(0,c)$．AC及AB中垂线的方程分别是

$$ax-cy+\frac{c^2}{2}-\frac{a^2}{2}=0,\ x=\frac{a+b}{2},$$

因此外心的坐标是$O\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{ab+c^2}{2c}\right)$，$AO$的斜率是$\frac{ab+c^2}{(b-a)c}$．(1)

又不难求出AC的方程是$cx+ay-ac=0$，　　(2)

BB_1的方程是$ax-cy-ab=0$，　　(3)

(2)$\times b+$(3)$\times(-c)$，得$(bc-ac)x+(ab+c^2)y=0$，

此即B_1C_1的方程，B_1C_1的斜率恰和(1)互为负倒数(注意$ab+c^2\neq0$)．

3．设所求方程是

$$x^2+y^2-4x-3+a(x^2+y^2-4y-3)=0,$$

其圆心坐标为$\left(\frac{2}{1+a},\ \frac{2a}{1+a}\right)$．代入方程$x-y-4=0$，解得$a=-\frac{1}{3}$．

故所求圆的方程是$x^2+y^2-6x+2y-3=0$．

4．(1) 建立直角坐标系，以直线AB为x轴，A为坐标原点，设$B(a,0)$，$M(t,0)$，$0\leqslant t<a$，这样，正方形$AMCD$及$MBEF$的外接圆方程分别为$x^2+y^2-tx-ty=0$和$x^2+y^2-(a+t)x-(a-t)y+at=0$．

相减得MN的方程$ax+(a-2t)y-at=0$，　　(4)

AF的方程为$(a-t)x-ty=0$，　　(5)

BC的方程为$tx+(a-t)y-at=0$．　　(6)

(5)和(6)相加即是(4)，从而AF及BC两直线过N点．

(2) 把(4)改写成

$$(-2y-a)t+(ax+ay)=0,$$

令 $\begin{cases}-2y-a=0,\\ ax+ay=0,\end{cases}$

解得 $x=+\frac{a}{2}$, $y=-\frac{a}{2}$，这就是 MN 所通过的定点，它和M的位置即和 t 无关.

习 题 23

1. 无妨设 $r=1$，并取此圆为单位圆，顶点 A_1，A_2，…，A_n 无妨设由 n 次单位根来代表，即方程 $z^n=1$ 的全部根(设为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$). 因此 P可用一个大于 1 的实数 a 来表示. 因此

$$\begin{aligned}PA_1\cdot PA_2\cdot\cdots\cdot PA_n&=|a-z_1||a-z_2|\cdots|a-z_n|\\&=|(a-z_1)(a-z_2)\cdots(a-z_n)|\\&=|(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)_{z=a}|\\&=|(z^n-1)_{z=a}|=|a^n-1|=a^n-1=OP^n-1.\end{aligned}$$

2. 设 P 用复数 z 来表示，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 仍用 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 表示. 这时

$$\begin{aligned}PA_k^2=|z-z_k|^2&=(z-z_k)(\overline{z}-\overline{z_k})\\&=1+1-\overline{z}z_k-z\overline{z_k}.\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{k=1}^{n}PA_k^2=2n-\overline{z}\sum_{k=1}^{n}z_k-z\sum_{k=1}^{n}\overline{z_k}.$$

但由于

$$z^n-1=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n),$$

左边的 z^{n-1} 的系数为 0，故可知

$$\sum_{k=1}^{n}z_k=0,\ \text{从而}\sum_{k=1}^{n}\overline{z_k}=\overline{\sum_{k=1}^{n}z_k}=0.$$

因此该值为 $2n$，与 z 无关.

3. 用复数 z_k 代表点 $P_k(k=1,\cdots,n)$，z 代表点 A. 于是

$$\sum_{k=1}^{n}AP_k^2=\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2-\frac{|z_1+\cdots+z_n|^2}{n}+n\left|z-\frac{z_1+\cdots+z_n}{n}\right|^2,$$

上式中头两项与 z 无关. 可见当

$$z=(z_1+\cdots+z_n)/n$$

时，和式取得最小值.

4. 由中点公式知 $2A=P_0+P_1$，故 $P_1=2A-P_0$，同理 $P_2=2B-P_1=2B-2A+P_0$，$P_3=2C-P_2=2(C-B+A)-P_0$. 同理 $P_6=2(C-B+A)-P_3$，由此可知 $P_6=P_0$.

5. 由 $(B-A')i=A-A'$ 得$(1-i)A'=A-Bi$，同理 $(1-i)B'=B-Ci$，$(1-i)C'=C-Di$，$(1-i)D'=D-Ai$. 故

$$2A''(1-i)=(1-i)(A'+B')=A+B-i(B+C),$$
$$2B''(1-i)=B+C-i(C+D),$$
$$2C''(1-i)=C+D-i(D+A).$$

由此立得$(C''-B')i=A''-B''$.

习 题 24

1. $\triangle ABC$ 为正三角形的充要条件是$\triangle ABC \backsim \triangle BCA$. 因此

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}.$$

3. 在复平面上，点 A,B,C 分别表示复数 z_1,z_2,z_3，$\triangle ABC$ 为正向正三角形，必须且只须$\triangle ABC \backsim \triangle OIU$，这里点 O，I，U 分别表示0，1 和复数 $u=e^{i\pi/3}$. 因此

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & u \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

即 $z_3-uz_2+z_1(u-1)=0$. 注意 $u-1=u^2$，立得结果.

6. 由于共圆的四边形对角互补，再注意到转角的方向，便得欲证明的等式.

7. 由前题的结果可知，若以 θ 来记复数 $(d-a)/(b-a)$ 的辐角，那么 $(b-c)/(d-c)$的辐角便是 $\pi-\theta$，因此有

$$\frac{d-a}{b-a}=\left|\frac{d-a}{b-a}\right|e^{i\theta},$$

$$\frac{b-c}{d-c}=\left|\frac{b-c}{d-c}\right|e^{i(\pi-\theta)}=-\left|\frac{b-c}{d-c}\right|e^{-i\theta}.$$

将以上二式相乘，得

$$\frac{|d-a||b-c|}{|b-a||d-c|}=-\left(\frac{d-a}{b-a}\right)\left(\frac{b-c}{d-c}\right).$$

因此 $AD\cdot BC+AB\cdot CD=|d-a||b-c|+|b-a||d-c|$

$$=\left[1-\left(\frac{d-a}{b-a}\right)\left(\frac{b-c}{d-c}\right)\right]|b-a||d-c|$$

$$=\frac{(c-a)(b-d)}{(b-a)(c-d)}|b-a||d-c|.$$

用 φ 来记复数 $(c-a)/(b-a)$ 的辐角，由图 24-5 可见，$(b-d)/(c-d)$ 的辐角为 $(-\varphi)$，这表明 $(c-a)(b-d)/[(b-a)(c-d)]$ 为一正实数，因此最后一式即为

$$\frac{|c-a|}{|b-a|}\frac{|b-d|}{|c-d|}|b-a||d-c|=|c-a||b-d|=AC\cdot BD.$$

8．复平面上点 A,B,C,D 分别表示复数 a,b,c,d. 由复数等式

$$(b-a)(d-c)+(d-a)(c-b)=(c-a)(d-b)$$

双方取模后，

$$|c-a||d-b|=|(c-a)(d-b)|=|(b-a)(d-c)+(d-a)(c-b)|\leqslant|(b-a)(d-c)|+|(d-a)(c-b)|=|b-a||d-c|+|d-a||c-b|.$$

上述式子中的等号当且只当

$$\frac{(b-a)(d-c)}{(d-a)(b-c)}=\text{实数}$$

时成立，即 A,B,C,D 四点共圆时成立.

由此可知托勒密定理的逆定理是成立的.

习 题 25

1．假设它们互相平分. 记它们的交点为 E，圆心为 O，连 OE，则应有 $OE\perp AB$ 和 $OE\perp CD$，这是不可能的.

2．假设 $PQRS$ 不是平行四边形，则它的对角线不互相平分，不妨设有 $OP<OR$ 及 $OQ\leqslant OS$. 在 OR，OS 上分别截取 $OR'=OP$，$OS'=OQ$，则 $R'S'$ 与 OC 的交点 C' 落在$\triangle ORS$ 内部，故 $OC'<OC$. 再证明 $OC'=OA$. 但因 $OA=OC$，导致矛盾.

3．假设 $\frac{a_k}{b_k}>1$，$k=1,\cdots,n$. 则有 $a_k>b_k$，因而 $a_k^2>b_k^2$，$k=1$，2，$\cdots,n$. 于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^2>\sum\limits_{k=1}^{n}b_k^2$，导致矛盾.

4．假设 $a_k\geqslant1$，$k=1,\cdots,8$，则有 $a_k=1+b_k$，$b_k\geqslant0$，$k=1,\cdots,8$. 于是知 $\sum\limits_{k=1}^{8}b_k=12$，从而

$$a_1\cdots a_8=(1+b_1)\cdots(1+b_8)\geqslant 1+b_1+\cdots+b_8=13>4.$$

此为矛盾.

5. 假设命题不成立，不妨设 $a_1>a_2$，于是利用所给的等式及底与指数的关系可得：$a_2<a_3$，再得 $a_3>a_4$，再得 $a_4<a_5,\cdots$，再得 $a_{16}<a_{17}, a_{17}>a_1$ 及 $a_1<a_2$，导致矛盾.

6. 假设能够写出这样 50 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{50}$. 于是就有 $a_1+a_2+\cdots+a_{34}>0$，而 $a_1+a_2+\cdots+a_{30}<0$，这样即知 $a_{31}+\cdots+a_{34}>0$. 同理可以推出 $a_{35}+\cdots+a_{38}>0$，$a_{39}+\cdots+a_{42}>0$，等等. 这样，就可得到 $a_{31}+a_{32}+\cdots+a_{50}>0$，但这是与已知条件相矛盾的. 故知不可能写出这样的 50 个实数.

7. 假设可作 13 条直线将这 64 个点全都彼此隔开，那么位于方格表边缘上的 28 个小方格的中心点更应被彼此隔开了. 然而，这 28 个点分布在一个正方形的周界上，13 条直线与此正方形的周界仅能至多交得26 个交点，可见它们并不能将这 28 个点全都彼此隔开. 由此导致矛盾.

8. 假设命题不成立，于是 5 个点中的任意两点的连线都不可能同时为两个不同的正三角形的边，再循此推理，即可得出矛盾.

9. 假设对某个 r_0 找不出这样的异色点，则每两个距离为 r_0 的点都应同色，循此即可证得平面上的点全都同色，而与平面上既有红点又有蓝点的假设矛盾.

习　题　26

1. 设 x 为奇数，反推回去，可知每一数组中都应有奇数个奇数. 但事实上，在 $a_1, a_2, \cdots, a_{4n}$ 中却有偶数个奇数，得出矛盾.

2. 假设能够分割，再考虑这些非凸四边形的内角之和，即可得出矛盾.

3. 如果多面体的顶点不少于 9 个，则可通过对各坐标的奇偶性作分析，并利用抽屉原则，即可证得有两个顶点的连线中点也是整点，从而导致矛盾.

4. 记 1974^n 的位数为 k，则因 $1974>1000$，知 $k>3n$. 假设 1974^n+2^n 的位数大于 k，则有 $1974^n+2^n\geqslant 10^k$. 因而 $1974^n<10^k\leqslant 1974^n+2^n$，

亦即 $987^n<2^{k-n}\cdot5^k\leqslant987^n+1$，此即表明 $2^{k-n}\cdot5^k=987^n+1$. 由于 $k-n\leqslant2n$，故当 $n\geqslant2$ 时，2^{k-n} 可被 8 整除，但 987^n+1 却不是 8 的倍数，导致矛盾. $n=1$ 的情形显然.

5. 假设在经过 13 边形的边的任何一条直线上都至少含有它的两条边，那么这种直线的数目当然不超过 6 条. 从而每一条这样的直线都至多与其余直线交得 5 个交点，于是在每条这样的直线上都至多包含 13 边形的 5 个顶点，也就是说每条这样的直线都至多经过了 13 边形的两条边. 如此一来，一共只有 12 条边，从而导致矛盾. 请自行构造出 $n>13$ 边形的例子.

6. 假设数列中至多有一个合数 a，则自它之后的各项均为质数. 这样一来，在末尾只能添加什么样的一位数呢？显然不能添加偶数和 5，并且添加 1 或 7 都不能多于 1 次，否则就有可能成为 3 的倍数，这就表明往后只能不断地添加 3. 但是一旦在质数 p 之后添加 p 个 3 之后，该数便成为 p 的倍数，因而又导致矛盾.

7. 假设这个十位数的各位数码都互不相同，则它的各位数字之和必为 $0+1+2+\cdots+9=45$，因此可被 9 整除. 但是不难看出，上述过程中所得到的每一个数都不可被 9 整除，是为矛盾.

习 题 27

2. $a_5=5$，假设 a_{5k} 是 5 的倍数，而 a_{5k+1} 被 5 除的余数为 $r\geqslant0$，则由递推公式知，$a_{5k+2}, a_{5k+3}, a_{5k+4}, a_{5(k+1)}$ 被 5 除的余数分别为 r，$2r$，$3r$ 和 $5r$，亦即 $a_{5(k+1)}$ 是 5 的倍数.

4. 对分母 n 进行归纳，容易验证 $n=3$ 时命题成立. 假设 $n=k$ 时命题成立，再看 $n=k+1$ 的情形. 设 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ 在 $n=k$ 时为相邻排列，在 $n=k+1$ 时仍相邻，则不证自明；若在 $n=k+1$ 时不相邻，此时存在唯一的分数 $\frac{q}{p}$ 使 $\frac{a}{b}<\frac{q}{p}<\frac{c}{d}$. 我们记

$$A=bq-ap,\quad B=cp-qd.$$

则 A，B 皆为正整数，但若 $\max(A,B)>1$，则有

$$b+d<b\cdot B+d\cdot A=p(bc-ad)=p.$$

于是$\frac{a+c}{b+d}\neq\frac{q}{p}$，但显然有$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$，这与$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$在$n=k$时为相邻的两项的事实矛盾.

可见应有 $A=1$，$B=1$.

5. 参考第 4 题.

6. 当 $n=1$，由 $a_1^5(a_1-1)^2\geqslant 0$ 即得 $a_1^7+a_1^5\geqslant 2a_1^6$. 假设 $n=k$ 时不等式成立，再考虑 $n=k+1$ 的情形. 设 $a_1<a_2<\cdots<a_{k+1}$ 为任意 $k+1$个不同的自然数. 由归纳假设可知

$$(a_1^7+a_2^7+\cdots+a_k^7)+(a_1^5+a_2^5+\cdots+a_k^5)\geqslant 2(a_1^3+a_2^3+\cdots$$

$+a_k^3)^2$. 又注意到

$$2a_{k+1}^6+4a_{k+1}^3(a_1^3+\cdots+a_k^3)$$

$$\leqslant 2a_{k+1}^6+4a_{k+1}^3(1^3+2^3+\cdots+a_1^3+\cdots+a_k^3+\cdots+(a_{k+1}-1)^3)$$

$$=2a_{k+1}^6+4a_{k+1}^3\cdot\frac{1}{4}(a_{k+1}-1)^2a_{k+1}^2=a_{k+1}^7+a_{k+1}^5.$$

将上述二不等式相加，即知当 $n=k+1$ 时，所证之不等式也成立. 又当 $a_1=1,a_2=2,\cdots,a_n=n$ 时等号可成立.

7. 在由 $n=k$ 向 $n=k+1$ 过渡时，需首先证明：存在 3 个相邻顶点分别涂有 3 种不同颜色，可用反证法证之. 然后再将 $n=k+1$ 的情形分为 4 种情况分别进行考虑.

8. 在由 $n=k$ 向 $n=k+1$ 过渡时，需分两种情形讨论.

习　题　28

1. 采用 $n\leqslant k$ 的归纳形式.

2. 采用 $n\leqslant k$ 的归纳形式.

3. 先证 $x_1^n+x_2^n$ 为正整数. 为此，先验证 $n=1$ 和 2 的情形；再设 $n=k$ 和 $k-1$ 时 $x_1^n+x_2^n$ 都是正整数，再证$x_1^{k+1}+x_2^{k+1}$ 也是正整数. 而为了证明 $x_1^n+x_2^n$ 不是 p 的倍数，需利用"加大跨度，增多起点"的技巧. 为此，应先推出

$$x_1^{k+3}+x_2^{k+3}=p[(x_1^{k+1}+x_2^{k+1})+(x_1^{k+2}+x_2^{k+2})]-(x_1^k+$$

$x_2^k)$，要以跨度 3 前进.

4. 当 $n=1$ 时，可令 $x=y=1$，$z=2$；当 $n=2$ 时，可令 $x=3$，$y=4$，z

$=5$. 然后再以跨度 2 前进.

5. 由 $0<f(1)<f(2)=2$, 知 $f(1)=1$.再以归纳法证明, 对一切非负整数 m 都有 $f(2^m+1)=2^m+1$. 将此结论与 f 的严格递增性结合, 即可知有 $f(n)=n$, 一切$n\in N$.

6. 若 m 是"好"的, 即存在表达式

$$m=a_1+a_2+\cdots+a_r,$$

而
$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_r}=1.$$

那么就有

$$\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+\cdots+\frac{1}{2a_r}+\frac{1}{2}=1,$$
$$\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+\cdots+\frac{1}{2a_r}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1.$$

这就是说, 只要 m 是"好"的, 那么

$$2m+2=2(a_1+a_2+\cdots+a_r)+2$$

及 $$2m+9=2(a_1+a_2+\cdots+a_r)+3+6$$

也都是好的. 利用这个事实, 再假设当 $33\leqslant n\leqslant k$ 时, n都是"好"的, 便可推知一切 $33\leqslant n\leqslant 2k$ 中的 n 也都是"好"的. 由此不难得知命题之结论.

7. 先验证 $n=0$ 时断言成立, 再假设 $n\leqslant k$ 时断言成立, 并构造一个辅助多项式

$$Q(x)=\frac{P(x+1)-P(x)}{a-1},$$

对其使用归纳假设, 如存在 $0\leqslant j\leqslant k+1$, 使

$$1\leqslant|a^j-Q(j)|=\frac{|a^{j+1}-P(j+1)-a^j+P(j)|}{a-1}$$
$$\leqslant\frac{|a^{j+1}-P(j+1)|}{a-1}+\frac{|a^j-P(j)|}{a-1},$$

再由 $a-1\geqslant 2$, 即知 $\max\{|a^{j+1}-P(j+1)|, |a^j-p(j)|\}\geqslant 1$.

8. 对 $n-m$ 进行归纳. 这样做, 可以避免对m 和n 这两个非负整数进行双重归纳.

习 题 29

1. 转换命题, 改证 $|f_{n+1}(x)|\geqslant|f_n(x)|$, 当$|x|>1$.

2. 转化命题，改为考察如下数列：$1,111,111111111,\cdots,\underbrace{11\cdots1}_{3^n\text{个}1},\cdots$；并用数学归纳法证明它们具有性质(2).

3. 约定 $a_0=0$，则对每个 $n\in N$，都可找到一个 $m\in N$，使得
$a_0+a_1+\cdots+a_{m-1}<n\leqslant a_1+\cdots+a_{m-1}+a_m$，再证明，$n$ 或是 a_1，$a_2,\cdots,a_m$ 中的某一项，或为其中某几项之和.

4. 转换命题，改为证明对任何 $n\in N$，都存在 a，$b\in N$，使得
$(1-\sqrt{2})^n=\sqrt{a^2}-\sqrt{2b^2}$，$a^2-2b^2=(-1)^n$.

5. 削弱命题，先证若 $m\geqslant n$ 且 m,n 均为自然数，则有 $f(m)\geqslant n$. 再设法利用 f 的性质得出 $f(n)=n$.

6. 由韦达定理并利用反证法，可证得结论(1)；再用数学归纳法证明对一切 $n\in N$，
$$f(n)=\frac{a^n-b^n}{a-b}+\frac{b^n-c^n}{b-c}+\frac{c^n-a^n}{c-a}$$
的值都有整数. 证明时，应先验证 $f(0)$，$f(1)$和 $f(2)$为整数，再假设$f(k-2)$，$f(k-1)$ 和 $f(k)$为整数，并推出递推式 $f(k+1)=f(k)+f(k-1)+f(k-2)$，从而知 $f(k+1)$亦为整数.

7. 加强命题，用归纳法证明：如果标作 -1 的点的数目不多于 n，则在 $3n+2$ 个点中至少有一个好点.

8. 如果 $i<j$，有 $a_i=a_j$，那么对一切满足条件 $k+l=i+j$ 的脚标$k<l$，也会有 $a_k=a_l$. 试用归纳法证明之.

9. 用数学归纳法证明对 $1\leqslant k\leqslant n$ 都有
$$\frac{n+1}{2n-k+2}<a_k<\frac{n}{2n-k}.$$

习 题 30

1. 解答本题的关键是应当从"双"的角度而不能从"只"的角度来考虑问题. 出现上述3类结果的情况数分别为：$C_{10}^4\cdot 2^4=3360$；$C_{10}^1\cdot C_9^2\cdot 2^2=1140$和 $C_{10}^2=45$.

2. 先挑出 3 人组成一组，再将其余 4 人分为两组，应当注意后两组间无

顺序编号，故共有 $C_7^3\cdot 3=105$ 种不同的分组方式。

3. 先解(2)，由于各小组间无顺序编号，知应有 $\frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}$ 种分组方式，再考虑各组中谁为正谁为负，各有 2 种可能，因此一共有 $2^n\cdot\frac{(2n)!}{2^k\cdot n!}$ 种不同的分组方式。

4. 区分情况考虑．若首位数是 3，则其余 4 个数字可在后面 4 个数位上任意排列，有 $4!=24$ 个．若首位数是 2,4,5，则因百位数不能为 3，从而只有 3 种可能，千位数亦有 3 种可能，十位和个位计有 $2!$ 种可能，因而有 $3^3\times 2=54$ 个．所以一共有 78 个合乎要求的五位数。

5. 由乘法原理知有 2^n 种不同的颜色序列．

习　题　31

1. (1)用排除法，先求出其中有两个值相等的解的组数，再由总数中减去其数目；(2)在(1)的基础上考虑．

2. 将问题化为求 $x+y+z=16$ 的非负整数解的题目，还可化为求 $x+y+z=19$ 的正整数解的题目．

3. 从所有可能的放法数目中减去所有小球全都放入某一个盒子的放法数目．

4. 利用第 3 题．

5. 设最左端的数为 j，则 $j+1, j+2, \cdots, n, n+1$ 必须按递增排列，而 $j-1, j-2, \cdots, 2, 1$ 必须按递降排列，但两组数字可穿插排列，因此可按不尽相异元素的排列模式考虑．然后再对 j 自 $1,2,\cdots,n,n+1$ 求和，得总的排法数目为 2^n 种．试将本题答案同习题30第 5 题作比较，并找出其间的内在联系．

6. 在已跳出的 $n+(n-k)+(n-m)=3n-(m+k)$ 只猫中，有 3 种不同颜色，但第 $3n-(k+m)$ 只一定是黑猫，再对前 $3n-(k+m+1)$ 只猫按不尽相异元素的排列模式处理．

7. 逐步考虑各种颜色的猫的跳出情况．首先，在第一只猫后面的 $3n-1$ 只猫中，还有 $n-1$ 只黑猫，故有 C_{3n-1}^{n-1} 种不同情形；在一开始由黑猫所形成的"连贯"之后，接上的是一只白猫，其余的白猫可以分布在

其余的$2n-1$个位置上，故有C_{2n-1}^{n-1}种不同情形；剩下的n只皆为黄猫．因此一共可能记录到$C_{3n-1}^{n-1}C_{2n-1}^{n-1}=\frac{(3n-1)!}{2n\cdot n!\cdot(n-1)!\cdot(n-1)!}$种不同的颜色序列．

8．先组合再排列，先设想有排成一行的n个小球，要在它们之间插入r块隔板，隔板不能插在球的两头，且每两块隔板之间至少有两个小球，于是知有$C_{(n-1)-(r-1)}^{r}=C_{n-r}^{r}$种不同的插法．再分别考虑年轻人和老年人的排序，便知共有$C_{n-r}^{r}\cdot n!\cdot r!=\frac{(n-r)!n!}{(n-2r)!}$种不同的排法．

习 题 32

1．图 32-2 中所有方格的集合记作S，$|S|=mn$．对妇女由西南角到东北角上班的一条路线l(图 32-2 中带箭头的粗折线)，用图32-2中阴影方格构成的集合A与之对应．显然A是S的子集，路线l不同，则相应的集合A也不同．即由此对应所确定的是由妇女上班路线集合到S的所有子集构成的集合的一个单射．因此由例 1，$f(m,n)\leqslant 2^{mn}$．

2．将$P(S)$分为两个集合M与N，其中M是$P(S)$中含n的子集构成的，N是$P(S)$中余下的子集构成的．设$A=\{n,a_1,a_2,\cdots,a_k\}\in M$．则令$\varphi(A)=B=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$．显然$\varphi(A)\in N$．$\varphi$是$M$到$N$上的双射．而$A$与$B$的交替和之和为$n$．因此所有交替和之和是$n\cdot 2^{n-1}$．

3．用向量$(a_1,a_2,\cdots,a_{m+n})$表示甲乙比赛胜负情况，若第i场甲胜，则令$a_i=1$，若乙胜，则令$a_i=-1$，$i=1,2,\cdots,m+n$．记$b_i=a_1+a_2+\cdots+a_i$，$i=1,2,\cdots,m+n$．在直角坐标平面上，自左至右依次连结下列格点：$(1,b_1),(2,b_2),\cdots,(m+n,b_{m+n})$，得到一条折线$l$．由于甲一直领先；因此对每个$i$，$b_i>0$．特别，$b_1=1$，$b_{m+n}=m-n$．所以$l$是连结$(1,1)$和$(m+n,m-n)$并且与$x$轴不交的折线，其全体记作$B$．在$m+n$场比赛中甲一直领先所确定的向量$(a_1,a_2,\cdots,a_{m+n})$全体的集合记作$A$．则$A$和$B$存在双射．可以证明，$|B|=C_{m+n-1}^{m-1}-C_{m+n-1}^{m}=\frac{m-n}{m+n}C_{m+n}^{n}$．这正是所要求的。

习　题　33

1. 所有小于 1000 的正整数构成的集合记作 S. S 中所有被整数 k 整除的正整数集合记作 A_k. 则 $\overline{A_5}\cap\overline{A_7}$ 即是 S 中所有不被 5 和 7 整除的正整数集合. 容易算得

$$|S|=999,\quad |A_5|=\left[\frac{999}{5}\right]=199,\quad |A_7|=\left[\frac{999}{7}\right]=142,$$

$$|A_5\cap A_7|=\left[\frac{999}{5}\right]=28.$$

由容斥原理(2)，即得 $|\overline{A}\cap\overline{A_7}|=666$.

2. 对 n 用归纳法证明，若 $|M|\geqslant n^2+1$，则符合条件的三角形一定存在. 当 $n=2$ 时结论显然真，设对 n 结论真，往证对 $n+1$ 结论真，设 A_r，A_s 连有线段. 记 $S=\{A_1,A_2,\cdots,A_{2n+2}\}$.

$R=\{Z\in S|Z$ 与 A_r 有边相连$\}\setminus\{A_s\}$. (注：集 A 与集 B 的差集，记作 $A\setminus B$，定义为 $A\setminus B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$.)

$T=\{Z\in S|Z$ 与 A_s 有边相连$\}\setminus\{A_r\}$.

从 M 中去掉与 A_r 和 A_s 相连的线段，其集合记作 M_1. 若 $|M_1|\geqslant n^2+1$，则结论显然真. 设 $|M_1|\leqslant n^2$. 因为 $|R\cup T|\leqslant 2n$，$|R|+|T|\geqslant(n+1)^2+1-1-n=2n+1$. 故由容斥原理(8)，$|R\cap T|\geqslant 1$，即存在 $A_t\in S$，使 $\triangle A_rA_sA_t$ 为所需三角形.

取线段 A_iA_j，其中 $i-j\equiv l\pmod 2$，$1\leqslant i\neq j\leqslant 2n$. 其集合记作 M. 对给定的 A_i，M 中以 A_i 为一端点的线段共有 n 条. 因此 $|M|=\frac{1}{2}\cdot 2n\cdot n=n^2$，设 $\triangle A_iA_jA_k$ 为所需三角形. 则 $i-j\equiv 1(\mathrm{mod}2)$，$j-k\equiv 1(\mathrm{mod}2)$，$k-i\equiv 1(\mathrm{mod}2)$，由前二式得到 $k-i\equiv 0(\mathrm{mod}2)$，与第三式矛盾. 因此所需三角形不存在.

3. 首先证明，在这 1987 个集合中，每两个的交恰含一个元素. 再证明，在这 1987 个集合中取一个集合 A，它含有一个元素 a，a 至少在 A 外的 46 个集合中出现. 最后证明，a 是这 1987 个集合中唯一公共元素. 由此即可得答数为 87429.

习　题　34

1. 在二项式定理 $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$ 中令 $x=2$，即得$\sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k=3^n$。

2. $\sum_{k=0}^{n}(k+1)C_n^k=\sum_{k=0}^{n}kC_n^k+\sum_{k=0}^{n}C_n^k=n2^{n-1}+2^n=(n+2)2^{n-1}$.

3. 记 $a_n=\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n-1}^k$，$b_n=\sum_{k=n}^{2n-1}C_{2n-1}^k$，那么 $a_n+b_n=\sum_{k=0}^{2n-1}C_{2n-1}^k=2^{2n-1}$，但容易知道 $b_n=a_n$，所以 $a_n=2^{2n-2}$。

4. $\sum_{k=0}^{n}kC_{2n}^k=2n\sum_{k=0}^{n}C_{2n-1}^{k-1}=2n\sum_{l=0}^{n-1}C_{2n-1}^l=n2^{2n-1}$.

5. 由于$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$，所以

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k x^k=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}x^k=\frac{1}{(n+1)x}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}x^{k+1}$$

$$=\frac{1}{(n+1)x}\sum_{l=1}^{n+1}C_{n+1}^l x^l=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{(n+1)x}.$$

6. 由基本恒等式(iii)和例 8 即得.

7. 因为$\frac{1}{k}C_n^k=\frac{1}{k}C_{n-1}^k+\frac{1}{n}C_n^k$，所以

$$f_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_n^k[1-(1-x)^k]$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}C_{n-1}^k[1-(1-x)^k]+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k$$

$$\cdot[1-(1-x)^k]=f_{n-1}+g_n,$$

而 $g_n=-\frac{1}{n}[\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k-\sum_{k=1}^{n}(-1)^kC_n^k(1-x)^k]$

$$=-\frac{1}{n}[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k-\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k(1-x)^k]$$

$$=\frac{1}{n}[1-(1-x)]^n=\frac{1}{n}x^n.$$

从递推公式 $f_n=f_{n-1}+\frac{1}{n}x^n$ 即得要证的等式。

8. 若记 $b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\frac{m}{m+k}$，不难证明

$$b_n=\frac{n}{m+n}b_{n-1},$$

取$m=\frac{1}{2}$，则$b_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \frac{1}{2k+1}$，因而

$$b_n=\frac{n}{\frac{1}{2}+n}b_{n-1}=\frac{n(n-1)}{\left(\frac{1}{2}+n\right)\left(\frac{1}{2}+n-1\right)}b_{n-2}=\cdots$$

$$=\frac{n!b_0}{\left(\frac{1}{2}+n\right)\left(\frac{1}{2}+n-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+1\right)}=\frac{2^n n!}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}$$

$$=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!}=\frac{2^{2n}}{2n+1}\left(C_{2n}^n\right)^{-1}.$$

9. $\sum_{k=0}^{n} kC_{2n+1}^k=(2n+1)\sum_{k=1}^{n}C_{2n}^{k-1}=(2n+1)\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^k$

$$=(2n+1)\left(\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^k-C_{2n}^n\right)=(2n+1)\left(2^{2n-1}-\frac{1}{2}C_{2n}^n\right).$$

这里已经利用了例 7 的结果.

10. 利用基本恒等式(iv)，得

$$\sum_{k=m}^{n}C_n^k C_k^m x^k(1-x)^{n-k}=C_n^m\sum_{k=m}^{n}C_{n-m}^{k-m}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=C_n^m\sum_{j=0}^{n-m}C_{n-m}^j x^{n-j}(1-x)^j=C_n^m x^m\sum_{j=0}^{n-m}C_{n-m}^j x^{n-m-j}(1-x)^j$$

$$=C_n^m x^m.$$

习　题　35

1. $(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$

$$=(C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n)(C_n^0+C_n^1x+\cdots+C_n^nx^n)$$

$$=\cdots\cdots+(C_n^0C_n^{n-1}+C_n^1C_n^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}C_n^0)x^{n-1}+\cdots$$

$$=\cdots\cdots+(C_n^0C_n^1+C_n^1C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}C_n^n)x^{n-1}+\cdots.$$

比较两边x^{n-1}的系数，即得要证的等式.

2. $(1-x^2)^m=(1-x)^m(1+x)^m$

$$=(C_m^0-C_m^1x+\cdots+(-1)^mC_m^mx^m)(C_m^0+C_m^1x+\cdots+C_m^mx^m)$$

$$=\cdots+(C_m^0C_m^{2n}-C_m^1C_m^{2n-1}+\cdots+C_m^{2n}C_m^0)x^{2n}+\cdots,$$

比较两端x^{2n}的系数，即得要证的等式.

3. 由基本恒等式(iii)，

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k C_m^k = n\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} C_m^k = n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} C_m^{k+1}.$$

不难知道，$\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} C_m^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{n-1-k} C_m^{k+1}$是

$$x^{-1}(1+x)^m(1+x)^{n-1} = x^{-1}(1+x)^{m+n-1}$$

中 x^{n-1} 的系数，由此即得要证的等式。

4．因为$(1-x^2)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^{2k}$，另一方面

$$(1-x^2)^n = (1-x)^n(1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k x^k\right).$$

比较这两式中 x^{2r} 的系数得

$$\sum_{k=0}^{2r}(-1)^k C_n^k C_n^{2r-k} = (-1)^r C_n^r,$$

如果 n 是偶数，取$r=\frac{n}{2}$，即得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k (C_n^k)^2 = (-1)^{\frac{n}{2}} C_n^{\frac{n}{2}};$$

再比较两式中 x^{2r+1} 的系数得

$$\sum_{k=0}^{2r+1}(-1)^k C_n^k C_n^{2r+1-k} = 0.$$

如果 n 是奇数，在上式中取 $r=\frac{n-1}{2}$，即得

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k (C_n^k)^2 = 0.$$

5．在公式(11)中取 $r=0$，$m=3$ 即得。

6．在公式(11)中取 $r=0$，$m=4$ 即得。

7．在第 6 题的等式中，用 $4n$ 换 n 即得。

8．在公式(11)中取 $r=1$，$m=3$ 即得。

9．在公式(11)中取 $r=2$，$m=3$ 即得。

10．在公式(11)中取 $r=0, m=n$ 即得。

习 题 36

1．$a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$ 所对应的特征方程是 $x^2=5x-6$，它的两个根是 $x_1=2$，$x_2=3$，所以

$$a_n=5\cdot 2^n-4\cdot 3^n \text{.}$$

2. $a_n=\frac{1}{12}[-3+4\cdot 3^n-(-1)^n 3^n]$.

3. $a_n=\frac{8}{9}-\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}(-2)^n$.

4. 设有 a_n 种不同的染法，易知 $a_1=2$，$a_2=3$，用和例 1 相同的方法讨论可得

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}.$$

若令 $a_0=1$，则 a_0，a_1，a_2 满足上面的关系，故按初始值 $a_0=1, a_1=2$ 和上述递推关系，即可解得 a_n。

5. 设至少要移动 a_n 次才能把甲桌子上这堆盘子移动到另一桌子上。我们先来建立 a_n 满足的递推关系．按照规定，只有当 $n-1$ 个盘子都移走后才能移动最大的盘子．因为只有三个桌子能放盘子，所以只有把上面 $n-1$ 个盘子依大小次序排好放在乙（或丙）桌上，最大的那个盘子才能移放到丙（或乙）桌上．因此，在移动最大的盘子前，必须移动 a_{n-1} 次．当大盘子移动到丙(或乙)桌上后，乙桌上那 $n-1$ 个盘子要依次放到大桌子上，还得移动 a_{n-1}次，因此总共要移动$2a_{n-1}+1$次，于是得

$$a_n=2a_{n-1}+1.$$

显然 $a_1=1$，若规定 $a_0=0$，则 a_0，a_1 满足上述递推关系．由此即可解得 $a_n=2^n-1$。

6. 令 $a_n=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_{n-k}^k r^k$，不难证明 a_n 满足递推关系 $a_n=a_{n-1}+ra_{n-2}$，易知 $a_0=a_1=1$，由此即可得要证的等式。

习　题　37

1. 递推关系可改写为

$$a_n=10+\frac{3}{a_{n-1}-8}, \quad a_n-8=2+\frac{3}{a_{n-1}-8},$$

令 $b_n=a_n-8$，则有 $b_n=2+\frac{3}{b_{n-1}}$，记 $b_n=\frac{p_n}{q_n}$，则

$$\frac{p_n}{q_n}=2+\frac{3q_{n-1}}{p_{n-1}}=\frac{2p_{n-1}+3q_{n-1}}{p_{n-1}}.$$

由此得 $q_n=p_{n-1}$，$p_n=2p_{n-1}+3q_{n-1}=2p_{n-1}+3p_{n-2}$.

而 $b_0=a_0-8=2$，所以 $p_0=2$，$q_0=1$，$b_1=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$，所以 $p_1=7$，$q_1=2$，解

$$p_0=2,\ p_1=7,\ p_n=2p_{n-1}+3p_{n-2},\ n=2,\ 3,\cdots$$

得 $p_n=\frac{1}{4}(3^{n+2}+(-1)^{n+1})$，$q_n=\frac{1}{4}(3^{n+1}+(-1)^n)$. 所以

$$a_n=8+b_n=8+\frac{3^{n+2}+(-1)^{n+1}}{3^{n+1}+(-1)^n}=\frac{11\cdot 3^{n+1}+7(-1)^n}{3^{n+1}+(-1)^n}.$$

2. 递推关系可写为

$(a_n+a_{n+1}-2\sqrt{a_na_{n+1}}-1)(a_n+a_{n+1}+2\sqrt{a_na_{n+1}}-1)=0$.

由题设，第二个因子不可能为0，所以 $a_n+a_{n+1}-2\sqrt{a_na_{n+1}}=1$，即 $\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=1$，于是，

$\sqrt{a_{n+1}}=1+\sqrt{a_n}=2+\sqrt{a_{n-1}}=3+\sqrt{a_{n-2}}=\cdots=n+\sqrt{a_2}=n+1$,

所以 $a_n=n^2$.

3. 把递推关系 $a_n^2\sqrt{a_{n-2}}=5a^2_{n-1}$ 改写为

$$\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_{n-1}}}\right)^2=5\frac{a_{n-1}}{\sqrt{a_{n-2}}},$$

记 $b_n=\frac{a_n}{\sqrt{a_{n-1}}}$，则可写 $b_n{}^2=5b_{n-1}$，$b_n=(5b_{n-1})^{\frac{1}{2}}$.

和例 3 的推导一样，可得

$b_n=5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}}\left(\frac{a_2}{\sqrt{a_1}}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}}=5^{1-\frac{1}{2^{n-2}}}\cdot 5^{\frac{1}{2^{n-2}}}=5$,

即 $a_n=5(a_{n-1})^{\frac{1}{2}}=(25a_{n-1})^{\frac{1}{2}}=25^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}a_1^{\frac{1}{2^{n-1}}}$

$=25^{1-\frac{1}{2^{n-1}}}4^{\frac{1}{2^{n-2}}}=2^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdot 5^{2-\frac{1}{2^{n-2}}}$.

4. 用例 2 的方法，可得

$$a_n=7^{b_n}+7^{-b_n}，其中\ b_n=\frac{1}{3}[2^n-(-1)^n].$$

5. 取 p，q 为二次方程 $x^2-ax+a=0$ 的根，则

$$p=\frac{a-\sqrt{a^2-4a}}{2},\quad q=\frac{a+\sqrt{a^2-4a}}{2}.$$

于是 $p<q$，$p+q=a$，$pq=a$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{p+q}{pq}=1$ 且 $1<p\leqslant 2,q\geqslant 2$.

此外 p,q 都是无理数，因为如果 p 是有理数，则 a^2-4a 便是一个平方数. 设 $a^2-4a=r^2$，容易看出 a 和 r 具有相同的奇偶性，因而 p,q 都是奇数，于是 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 得 $p=q=2$，因而 $a=p+q=4$，这与题设 a 是大于 4 的奇数不合. 现在取 $f(n)=[pn].g(n)=[qn]$，则 $f(1)=[p]=1$，因为 $[pn]<pn<[pn]+1$，所以

$na-[pn]-1<na-pn<na-[pn]$，因而 $[na-pn]=na-[pn]-1$. 于是

$g(n)=[qn]=[(a-p)n]=[an-pn]=na-[pn]-1=na-1-f(n)$. 这就证明了 $f(n)$ 和 $g(n)$ 满足(i)(ii)两条. 对于给定的自然数 n，设有自然数 k，使得 $k<f(n+1)=[p(n+1)]$，且 k 与 $f(1),\cdots,f(n)$，$g(1),\cdots,g(n)$ 的数均不等. 在例 6 的命题中已经证明 k 必出现在 $\{f(n)\}$ 或 $\{g(n)\}$ 中，但因 $k<f(n+1)=[p(n+1)]\leqslant[q(n+1)]=g(n+1)$，故 k 必出现在

$f(1),\cdots,f(n),g(1),\cdots,g(n)$

中，这与假定不符，故这样的 k 不存在，这就证明了(iii).

习 题 38

1. $C_p^k=p\frac{(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}$ 是整数，即 $k!\mid p(p-1)\cdots(p-k+1)$. 当 $1\leqslant k\leqslant p-1$ 时，$(p,k!)=1$，故 $k!\mid(p-1)\cdots(p-k+1)$，所以 $p\mid C_p^k$.

2. 如 $n=p^2$，则 $p\geqslant5$，$n-1\geqslant4p$. 所以在 $1,2,\cdots,n-1$ 中有 p，$2p$，$3p,4p$. 因此 $p^4=n^2\mid(n-1)!$. 如 $n\neq p^2$，设 $p\geqslant3$ 是 n 的最小素因子，则 $n=p\cdot\frac{n}{p}$. $\frac{n}{p}>p\geqslant3$，在 $1,2,\cdots,n-1$ 中有 p，$2p,\frac{n}{p},2\frac{n}{p}$，显然这四个数不等，故 $n^2=p^2\left(\frac{n}{p}\right)^2 \Bigm| (n-1)!$.

3. 设 $d=(m,n)$. 显然有 $2^d-1\mid(2^m-1,2^n-1)$. 取正整数 x,y 使 $mx-ny=d$. 如果 $D\mid2^m-1$，则 $D\mid2^{mx}-1$. 故当 D 是 2^m-1 和 2^n-1 的公约数时必有 $D\mid2^{mx}-2^{ny}=2^{ny}(2^d-1)$. 由于 D 是奇数，故 $D\mid2^d-1$. 所以 2^d-1 是 2^m-1 和 2^n-1 的最大公约数.

4．用反证法及唯一分解定理．

5．考虑 $1,2,\cdots,n$ 中被 $p,p^2,\cdots$ 除尽的数的个数．

6．与定理 1 的证明类似．

7．设 $n=n_1n_2, n_2\geqslant n_1\geqslant 3$，故在 $m,m+1,\cdots,m+n-1$ 中必有三个数是 n_1 的倍数，其中必有一个不等于 $m+\frac{n-1}{2}$，设为 a_1，在 $m,m+1,\cdots,m+n-1$ 中必有三个数是 n_2 的倍数，其中必有一个不等于 a_1，也不等于 $m+\frac{n-1}{2}$．于是，$n\left(m+\frac{n-1}{2}\right)=n_1n_2\left(m+\frac{n-1}{2}\right)\Big|$ $m(m+1)\cdots(m+n-1)$．

8．设 $a\geqslant b$，对 a,b 中较小者用归纳法．$b=1$ 时，$a=b=1$．当 $b>1$ 时，令 $a=bq+r, 0\leqslant|r|\leqslant\frac{b}{2}$．$a^2+b^2=l(ab+1)$．如 $q=1$，则 $r\geqslant 0, a^2+b^2=2(ab+1)+r^2-2$，故 $ab+1\mid r^2-2$，但 $ab+1\geqslant b^2+1\geqslant 4r^2+1$ 只有 $r=0$，$a=b$，$a^2+1\mid 2$，只有 $a=1$，不可能．所以 $q>1$．如果 $l\geqslant q+1$，则 $a^2+b^2=b^2q^2+2bqr+r^2+b^2\geqslant(q+1)(ab+1)=(q+1)(b^2q+br+1)>(q+1)(b^2q+br)$ 推出 $(q-1)b^2<(q-1)br+r^2<\frac{q-1}{2}b^2+\frac{b^2}{4}$，即 $q<\frac{3}{2}$，只有 $q=1$，也不可能．如果 $l\leqslant q-1$，类似可推知 $q>b(q+1)(b-r)+r^2$，也是不可能的．所以必有 $l=q$．因此 $l=blr+b^2+r^2$，所以必须 $r\leqslant 0$．如 $r=0$，即 $l=b^2$．如果 $r<0$，就有 $b^2+(-r)^2=l(b(-r)+1)$．由于 $0<-r<b$，由归纳假设可知，l 为平方数．

9．对 n 用归纳法证明 $M=n$．$n=1$ 时，显然．如 $n=2k$，则由归纳假设，
$M=\left[\frac{2k+1}{2}\right]+\left[\frac{2k+2}{2^2}\right]+\cdots=k+\left[\frac{k+1}{2}\right]+\cdots=k+k=n$．如 $n=2k+1$，当 $l\geqslant 2$ 时，令 $\left[\frac{2k+1+2^{l-1}}{2^l}\right]=q$，则 $2k+1+2^{l-1}=q2^l+t$，$0\leqslant t<2^l$．但不能有 $t=0$，否则 $2k+2^{l-1}+1$ 为偶数．所以 $t\geqslant 1$．于是又有 $2k+2^{l-1}=q2^l+t-1$，$0\leqslant t-1<2^l$．所以 $\left[\frac{2k+1+2^{l-1}}{2^l}\right]=\left[\frac{2k+2^{l-1}}{2^l}\right]=q$．因此又有 $\left[\frac{2k+1+1}{2}\right]+\left[\frac{2k+1+2}{2^2}\right]+\cdots=k+1+\left[\frac{2k+2}{2^2}\right]+\cdots=k+1+k=2k+1=n$．

习　题　39

1. 由 $a\equiv a^p\equiv b^p\equiv b(p)$，可设 $a=b+pt$，于是 $a^p-b^p=(b+pt)^p-b^p$. 利用二项式定理展开即得.

2. 用 8 作模进行比较.

3. kx_k 是 k 个 1 或 -1 的和，故 $k_1+2x_2+\cdots+nx_n$ 可以写成 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个绝对值为 1 的数之和. 若这个和为 0，则 $+1$ 和 -1 有 $\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$ 个，因此要有 $n(n+1)\equiv0$ (4). 但 $n\equiv2$ (4)，故 $n(n+1)\equiv2\cdot3\equiv2(4)$. 矛盾.

4. 设 q 是 2^p-1 的素因子，则 $2^p\equiv1$ (q). 显然，p 是使 $2^n\equiv1$ (q) 成立的最小正整数，所以，$p|q-1$. 又 $q-1$ 为偶数，故 $2|q-1$，因此 $2p|q-1$，即 $q=2px+1$.

5. $7^4\equiv1$ (100)，$7\equiv-1$ (4)，故 $7^7\equiv7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}\equiv-1$ (4)，即有 $\overbrace{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}}^{k-1}=4x+3$. 故 $7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}\equiv7^{4x+3}\equiv7^3\equiv43$ (100)，即末二位数字为43.

6. 设五个连续正整数 $n,n+1,n+2,n+3,n+4$ 之积为平方数 k^2，因为它们任两个的最大公约数$\leqslant4$，所以 k 中$\geqslant5$ 的素因子 p 只能除尽 5个数中之一，并且在这个数的标准因子分解式中 p 的次数为偶数. 任意连续 6 个整数是 6 的完系，其中有两个与 6 互素. 所以在这 5 个连续整数中有一个或两个与 6 互素. 如有两个，则这两个都是平方数，它们分别模 6 与 1 和 5 同余. 但任何数的平方都不可能模 6 与 5 同余，所以在这 5 个连续整数中只能有一个是与6 互素的，并且它是一个平方数. 由于这 5 个数都模 6 不与 5 同余，因而 $n+5\equiv5(6)$，即 $n\equiv0$ (6)，所以 $n+1=u^2$，它是一个奇数的平方，故 $n\equiv0(8)$，$n+4\equiv4$ (8)，又 $n+4\equiv4$ (6). 所以 $3\nmid n+4$. 由前面的讨论 $n+4=4v^2$，所以 $3=4v^2-u^2=(2v-u)(2v+u)$，即 $2v+u=3$，$2v-u=1$，只有$u=v=1$，得 $n=0$，这是不可能的.

7. 用 $p(n)$ 表示 n 的最小素因子．如 p 是素数，$2^n \equiv 1\ (p)$．设 r 是使 $2^r \equiv 1\ (p)$ 成立的最小正数，则 $r|n$，又由于 $2^{p-1} \equiv 1\ (p)$，$r|p-1$，故 $p(r)|n$，$p(r)|p-1$．于是 $p(n) \leqslant p(r) \leqslant p-1 < p$．设有 $n_1 > 1$，则由整除关系要有 $n_2 > 1, \cdots, n_k > 1$．在前面的讨论中取 $n = n_1$，$p = p(n_k)$，则有 $p(n_1) < p(n_k)$．依次类推可得 $p(n_1) < p(n_k) < p(n_{k-1}) < \cdots < p(n_2) < p(n_1)$，矛盾．

8. 当 x 过 $0, 1, \cdots, [\sqrt{p}]$，y 过 $0, 1, \cdots, [\sqrt{p}]$ 时 $ax+by$ 共取到 $(1+[\sqrt{p}])^2 > p$ 个值，故其中必有二数关于模 p 同余．设 $ax_1+by_1 \equiv ax_2+by_2\ (p)$，显然要有 $x_1 \not\equiv x_2 (p)$，$y_1 \not\equiv y_2 (p)$．令 $x_0 = x_1 - x_2$，$y_0 = y_1 - y_2$，必有 $0 < |x_0| < \sqrt{p}$，$0 < |y_0| < \sqrt{p}$．且 $ax_0 + by_0 \equiv 0\ (p)$，于是 $a^2x_0^2 - b^2y_0^2 \equiv 0\ (p)$．

9. 用归纳法可证当 $k \geqslant 1$ 时 $x_{2k} \equiv 3\ (8)$，$x_{2k+1} \equiv 5\ (8)$，$y_{2k} \equiv 1\ (8)$，$y_{2k+1} \equiv 7\ (8)$．而 $x_1 = 1$ 显然不等于任何 $y_n (n \geqslant 1)$．

10. 显然 $k^2 \equiv (p-k)^2\ (p)$，所以 n^2 必关于 $1^2, \cdots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ 之一同余．但当 $1 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant \frac{p-1}{2}$ 时 $l_1^2 \not\equiv l_2^2\ (p)$．因若不然 $(l_2+l_1)(l_2-l_1) \equiv 0\ (p)$，必有 $p|l_2+l_1$ 或 $p|l_2-l_1$．但 $0 < l_2-l_1 < l_2+l_1 < p$，这是不可能的．因此模 p 的"平方数"恰有 $\frac{p-1}{2}$ 个，即在一个模 p 的缩系中有 $\frac{p-1}{2}$ 个是"平方数"，$\frac{p-1}{2}$ 个不是"平方数"，在数论中，称为模 p 的平方剩余和非平方剩余．

11. 设 $a_1b_1, \cdots, a_pb_p$ 是模 p 的完类，于是 a_ib_i 中只有一个是 p 的倍数，设为 a_pb_p，必 $p|a_p$ 及 $p|b_p$．由威尔逊定理 $a_1 \cdots a_{p-1} \equiv b_1 \cdots b_{p-1} \equiv -1\ (p)$，故有 $a_1b_1 \cdots a_{p-1}b_{p-1} \equiv 1 (p)$．这与 $a_1b_1, \cdots, a_{p-1}b_{p-1}$ 为模 p 的缩系相矛盾．

习　题　40

1. 先设 $(x, y, z) = 1$，令 $d = (x, y)$，$x = dx_1$，$y = dy_1$，则 $(d, z) = 1$．整理方程式得到 $z(x_1+y_1) = dx_1y_1$．由于 $(x_1y_1, x_1+y_1) = 1$，故 $x_1y_1|z$．又 $(z, d) = 1$，所以又有 $z|x_1y_1$．因此 $z = x_1y_1, d = x_1+y_1$，

于是 $x=(u+v)u$，$y=(u+v)v$，$z=uv$，$(u,v)=1$ 就是方程满足 $(x,y,z)=1$ 的解，而方程的正整数解为

$x=tu(u+v)$，$y=tv(u+v)$，$z=tuv$，$(u,v)=1,t,u,v>0$.

2. 如果 x 或 y 为 1，显然只要一个容器就行了. 设 $x>y>1$，假定顾客要买 a 千克油. 设 $a=yq+r$，$0\leqslant r<y$，先用 y 容器将 yq 千克油注入顾客的盛油容器. 由于 $(x,y)=1$，故必有 $m,n>0$，使 $my-nx=r$. 将 y 容器装满油逐次注入空的 x 容器，当 x 容器装满后，将 x 容器倒空，再将 y 容器的余油注入 x 容器，再次将 y 容器装满，逐次注入 x 容器，至 x 装满再倒空. 如此下去. 到 x 容器倒空 n 次时，y 容器中的余油就是 r 千克. 因为这时余油为 t 千克，则有 $0\leqslant t<y$. 由于 $-nx=-my+r$，$0\leqslant r<y$ 的表示法是唯一的，所以只有 $t=r$.

3. $2^r=x^{2n+1}\mp1=(x\mp1)(x^{2n}\pm x^{2n-1}+\cdots\pm x+1)$. 因为 x 是奇数，故右边第二个因子是 $2n+1$ 个奇数之和，也必是奇数. 由于 $x>1$，这个和也必大于 1. 这与左边无奇因子相矛盾. 故方程无解.

4. 将 $z=3-x-y$ 代入方程得 $8-3x(3-x)-3y(3-x)+xy(3-x)+y^2(3-x)=0$，故 $3-x\mid8$，取 $3-x$ 为 ±1，±2，±4，±8，得 $x=-5,-1,1,2,4,5,7,11$. 代入方程组逐一试算得到四组解 $(x,y,z)=(1,1,1)$，$(-5,4,4)$，$(4,-5,4)$，$(4,4,-5)$. 容易看出后三组解是由一组解轮换三个变量值得到的.

5. 用 5 作模，得 $2y^2\equiv1\ (5)$. 但 $2y^2\equiv0$，2 或 3 (5)，故方程无解.

6. 对任意常数 c 有 $\left(x^2+\frac{x}{2}+c\right)^2-y^2=\left(2c-\frac{3}{4}\right)x^2+(c-1)x+c^2-1$. 适当选择 c 使右边成为 $\pm(ax+b)^2$ 的形式，就可以比较准确地判断 y 与 x 的关系. 首先注意到取 $c=1$ 时得到 $\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)^2-y^2=\frac{5}{4}x^2\geqslant0$. 再注意到要使右边成为一个平方式，其判别式必为零. 由此解得 $c=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$，显然取 $c=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 时右边取值较小，于是又得到 $\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2-y^2=-\frac{5-2\sqrt{5}}{4}\left(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2<0$，由于 $x^2+\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}>0$. $x^2+\frac{x}{2}+1>0$，所以必有 $x^2+\frac{x}{2}+1\geqslant|y|$

$>x^2+\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，此式又可写成$x^2+\frac{x+1}{2}+\frac{1}{2}\geqslant|y|>x^2+\frac{x+1}{2}+\frac{\sqrt{5}-3}{4}$．所以当 x 为偶数时 $|y|=x^2+\frac{x}{2}+1$，因此$\frac{5}{4}x^2=0$，即$x=0$，$|y|=1$；当 x 为奇数时 $|y|=x^2+\frac{x+1}{2}$，代入原方程得$\frac{(x+1)^2}{4}=x+1$，即 $x=-1$ 或 3，对应地有$|y|=1$ 或 11．总起来得到 6 组解：$(x,y)=(0,\pm1)$，$(-1,\pm1)$，$(3,\pm11)$．

7．显然$(x,y)=(2,1)$是一组解．若 $x\geqslant3$，则有 $3^y\equiv-1\ (8)$，但 $3^{2n}\equiv1\ (8)$，$3^{2n+1}\equiv3\ (8)$，所以没有 $x\geqslant3$ 的解．

8．显然 $x>1$．如 $x=2$，则 $2^y=y^2+1$．当 $y\geqslant5$ 时 $2^y>y^2+1$，可知，必 $y=1$；如 $y=1$，显然 $x=2$；如 $y=2$，则 $x^2=2^x+1$．同上，也只有 $x<5$，必 $x=3$．下面证明方程没有 $x>y\geqslant3$ 和 $y>x\geqslant3$ 的解，只要证明对任何 $m>n\geqslant3$，$n^m>m^n+1$ 即可．下面先证一个重要的不等式：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2.75$．用二项式展开得$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{n(n-1)}{2!n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-(n-1))}{n!n^n}<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<2.5+\frac{1}{6}\left[1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4.5}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right]=2.5+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{n}\right)<2.75$．

令$r=m-n\geqslant1$，于是 $m^n=(n+r)^n=n^n\cdot\left(1+\frac{r}{n}\right)^n<n^n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^r\right]^n=n^n\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^r<n^n\cdot2.75^r=n^m\left(\frac{2.75}{n}\right)^r<0.92n^m=n^m-0.08\cdot n^m<n^n-0.08\cdot3^4<n^m-1$．因此不能有 $n^m=m^n\pm1$．即原方程只有两组解：$(x,y)=(2,1)$，$(3,2)$．

9．即求 n,k，使$\frac{n(n+1)}{2}=k^2$，整理得$(2n+1)^2-8k^2=1$．由于$x^2-8y^2=1$ 的解中 x 必是奇数．所以 Pell 方程的任一组解(x,y)就给出$(n,k)=\left(\frac{x-1}{2},y\right)$这样一组解．方程 $x^2-8y^2=1$ 的最小正整数解是$(3,1)$，故通解为 $x+\sqrt{8}\,y=(3+\sqrt{8})^m$．由此得出$n=\frac{x-1}{2}$，其前三个值是：$n=1,8,49$．

习 题 42

1. 将等式两边展开并比较 x^n 项系数得 $C_n^0C_n^n+C_n^1C_n^{n-1}+\cdots+C_n^kC_n^{n-k}+\cdots+C_n^nC_n^0=C_{2n}^n$. 由 $C_n^{n-k}=C_n^k$ 得 $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^k)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$.

2. $P(0)=0$, $P(1)=P(0^2+1)=(P(0))^2+1=1$, $P(2)=P(1^2+1)=(P(1))^2+1=2$, $P(5)=P(2^2+1)=(P(2))^2+1=2^2+1=5$.一般地，定义 $x_0=0$, 并对 $n>0$ 定义 $x_n=x_{n-1}^2+1$. 对 n 作归纳可知 $P(x_n)=x_n$ 对所有整数 $n\geqslant 0$ 成立. 由恒等定理知 $P(x)=x$.

3. $f(a+bx)$除以 x^2-2 的余式 $cx+d$ 的系数c, d是有理数，将 $x=\sqrt{2}$代入 $f(a+bx)=q(x)(x^2-2)+cx+d$得 $c\sqrt{2}+d=0$.若$c\neq 0$, $\sqrt{2}=-\dfrac{d}{c}$有理数. 故 $c=0$, $d=0$. $f(a+bx)=q(x)(x^2-2)$. 将 $x=-\sqrt{2}$代入即得 $f(a-b\sqrt{2})=0$.

4. $(f(3)-f(2))-(f(2)-f(1))=(5+a)-(3+a)=2$.如果$|f(1)|$, $|f(2)|$, $|f(3)|$都$<\dfrac{1}{2}$,则$|(f(3)-f(2))-(f(2)-f(1))|<2$, 矛盾.

5. 当 $a_1=a_2=0$ 时易见$a_3=0$, 取 $A=0$, $B=1$ 即可. 设 $a_1\neq 0$, 令 $y=u_1(x)=a_1x+b_1$, 则 $u_j(x)=A_jy+B_j$, $j=2,3$.比较等式$y^n+(A_2y+B_2)^n=(A_3y+B_3)^n$ 两边的常数项，一次项及 n 次项系数得$B_2^n=B_3^n$, $nA_2B_2^{n-1}=nA_3B_3^{n-1}$, $1+A_2^n=A_3^n$.当 $B_2\neq 0$时$B_3\neq 0$, $A_2B_3^n=A_2B_2^n=A_2B_2^{n-1}\cdot B_2=A_3B_3^{n-1}B_2$, $A_2B_3=A_3B_2$, $A_2^nB_3^n=A_3^nB_2^n=A_3^nB_3^n$, $A_2^n=A_3^n$,与$1+A_2^n=A_3^n$矛盾. 故 $B_2=B_3=0$, 取 $Ax+B=a_1x+b_1=y$, $c_j=A_j$ $(j=2,3)$.

6. $G(x)=P(x)-2=q(x)(x-x_1)\cdots(x-x_4)$. 当 k 为整数时$G(k)$被四个不同整数 $k-x_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 之积整除，只能为 0 或为合数，不等于$\pm 1,3,5,7$, $P(k)\neq 1,3,5,7,9$.

7. 去分母得$(bc+ac+ab)(a+b+c)-abc=0$. 仿例 14 的方法可将左边分解为 $\lambda(a+b)(a+c)(b+c)$, λ 为非零常数. 于是 $b=-a$或$c=-a$

或 $c=-b$， $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}$.

8．$P(x)=Q_1(x)(x-2)+P(2)=Q_2(x)(x-3)+P(3)$， $3|P(5)=3Q_1(5)+P(2)$，$2|P(5)=2Q_2(5)+P(3)$，于是 $6|P(5)$.

9．$P(a_i)=1(1\leqslant i\leqslant n)$，且 $P(x)$ 无实根．设 $P(x)=P_1(x)P_2(x)$， 则由 $P(x_i)=P_1(x_i)P_2(x_i)=1$ 得 $P_1(x_i)=P_2(x_i)=\pm1, 1\leqslant i\leqslant n$．若有 $i\neq j$ 使 $P_1(x_i)=1$ 而 $P_1(x_j)=-1$， 则在 x_i 与 x_j 之间有实数 x_0 使 $P_1(x_0)=0, P(x_0)=0$，矛盾．故所有 $P_1(x_i)$ 与 $P_2(x_i)$ 等于同一个 ε，$\varepsilon=1$ 或 -1．$P_j(x)=q_j(x)(x-a_1)\cdots(x-a_n)+\varepsilon, j=1,2$．若 $P_1(x)$ 与 $P_2(x)$ 都是至少一次的多项式， 则 $q_1(x)=q_2(x)=\pm1$， $P(x)=[\pm(x-a_1)\cdots(x-a_n)+\varepsilon]^2$．展开得 $\pm2\varepsilon(x-a_1)\cdots(x-a_n)=0$，矛盾．

10．(1)对整数 $a\neq b$， 应有 $(a-b)|(P(a)-P(b))$．但 $(25-16)\nmid(49-25)$．(2) $P(x)$ 除以 $(x-10)(x-20)(x-30)$ 的余式 $R(x)$ 的系数应全为整数．但由插值公式知 $R(x)=\frac{10(x-20)(x-30)}{(10-20)(10-30)}+\frac{20(x-10)(x-30)}{(20-10)(20-30)}+\frac{40(x-10)(x-20)}{(30-10)(30-20)}=\frac{1}{20}x^2-\frac{1}{2}x+10$．故不可能．

11．令 $y=x^2$， 则 y^5+1 除以 $y+1$，$y+2$，$y-2$ 的余数分别是 $0, -31, 33$．由插值公式知所求余式为 $\frac{-31(y+1)(y-2)}{(-2+1)(-2-2)}+\frac{33(y+1)(y+2)}{(2+1)(2+2)}=-5y^2+16y+21=-5x^4+16x^2+21$.

12．利用恒等式 $x^{m+n}+\frac{1}{x^{m+n}}=\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)-\left(x^{m-n}+\frac{1}{x^{m-n}}\right)$ 依次计算 $k=2,4,3,6,7,13$ 时的 $x^k+\frac{1}{x^k}$．解答为： $x^{13}+\frac{1}{x^{13}}=a^{13}-13a^{11}+65a^9-156a^7+182a^5-91a^3+13a$.

习　题　43

1．(1) $x^8+x^4+1=(x^4+1)^2-x^4=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)=[(x^2+1)^2-x^2](x^4-x^2+1)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$．又解：

原式 $=\frac{x^{12}-1}{x^4-1}=\frac{x^6+1}{x^2+1}\cdot\frac{x^3+1}{x+1}\cdot\frac{x^3-1}{x-1}=(x^4-x^2+1)(x^2-x+$

$1)(x^2+x+1)$.

(2) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)$.

(3) 将每个实二次因子再分解(略).

又解：$\dfrac{x^{18}-1}{x^4-1}=(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^4)(x-\omega^5)(x-\omega^7)(x-\omega^8)$

$(x-\omega^{10})(x-\omega^{11})$，其中 $\omega=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$.

2. $f(x)=A(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_s)^{m_s}\mid A(x^{100}-\alpha_1{}^{100})^{m_1}\cdots(x^{100}-\alpha_s{}^{100})^{m_s}$.

3. 在实数范围内有分解 $(x+\sqrt{3}+\sqrt{2})(x+\sqrt{3}-\sqrt{2})(x-\sqrt{3}+\sqrt{2})(x-\sqrt{3}-\sqrt{2})$，每两个因子之积都有无理系数.

4. $(a+bi)^n=x+yi$，其中 $x=a^n-C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots$，$y=C_n^1a^{n-1}b-C_n^3a^{n-3}b^3+\cdots$，$(a-bi)^n=x-yi$，$(a^2+b^2)^n=x^2+y^2$.

5. 如能分解，有一次因子 $\alpha(x-\beta)$，$\alpha=\pm1$，$\beta\mid d$. $bd+cd=(b+c)d$ 为奇数，$b+c$ 与 d 为奇数，β 也为奇数，$\beta^3+b\beta^2+c\beta+d\equiv1+b+c+d\equiv1 \pmod 2$，与 $\beta^3+b\beta^2+c\beta+d=0$ 矛盾.

6. 用爱森斯坦定理，或仿照例 6.

7. $a^2+b^2+(ab)^2=(ab)^2+2ab+(a-b)^2=(ab)^2+2ab+1=(ab+1)^2$.

8. $4x^3+6x^2+4x+1=(x+1)^4-x^4=[(x+1)^2+x^2][(x+1)^2-x^2]$.

9. $(x^{9999}+x^{8888}+\cdots+1)-(x^9+x^8+\cdots+x+1)=x^9(x^{9990}-1)+x^8(x^{8880}-1)+\cdots+x(x^{1110}-1)$ 被 $x^{10}-1$ 从而被 $x^9+x^8+\cdots+x+1$ 整除.

10. 令 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$，则 $\omega+\omega^2+\cdots+\omega^n=\omega\cdot\dfrac{\omega^n-1}{\omega-1}=0$，取实部即得所需等式.

11. 令 $\omega=\cos\dfrac{\pi}{2m+1}+i\sin\dfrac{\pi}{2m+1}$，$\omega^{2m}-\omega^{2m-1}+\cdots+\omega^2-\omega+1=\dfrac{\omega^{2m+1}+1}{\omega+1}=0$，$1=(\omega-\omega^{2m})-(\omega^2-\omega^{2m-1})+\cdots+(-1)^{m-1}(\omega^m-\omega^{m+1})$. 而对每个自然数 $k\leqslant m$，有 $\omega^k-\omega^{2m+1-k}=\omega^k-\omega^{2m+1}\omega^{-k}=\omega^k+\omega^{-k}=2\cos\dfrac{k\pi}{2m+1}$.

12. 令 $\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$. 取 $x=\omega^k(1\leqslant k\leqslant 4)$得四个等式 $P(1)+\omega^kQ(1)+\omega^{2k}R(1)=0$, 这四个式相加得 $4P(1)-Q(1)-R(1)=0$. 又将 $P(1)+\omega^kQ(1)+\omega^{2k}R(1)=0$ 乘以 ω^k 得 $\omega^kP(1)+\varphi^{2k}Q(1)+\omega^{3k}R(1)=0$,将 $k=1,2,3,4$ 时的四个等式再相加得 $-P(1)-Q(1)-R(1)=0$. 于是 $(4P(1)-Q(1)-R(1))-(-P(1)-Q(1)-R(1))=0$, 即 $5P(1)=0$, $P(1)=0$, $(x-1)|P(x)$.

注 第12题可进一步改为,设 $P_i(x)(0\leqslant i\leqslant 4)$是多项式,且 $P_1(x^5)+xP_2(x^5)+x^2P_3(x^5)+x^3P_4(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)P_0(x)$, 则 $x-1$整除$P_i(x)$, $0\leqslant i\leqslant 4$.证明如下:仍设 $\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$.又 $x=\omega^k(1\leqslant k\leqslant 4)$代入所给的关系式得 $P_1(1)+\omega^kP_2(1)+\omega^{2k}P_3(1)+\omega^{3k}P_4(1)=0$. 再乘以 ω^k 得 $\omega^kP_1(1)+\omega^{2k}P_2(1)+\omega^{3k}P_3(1)+\omega^{4k}P_4(1)=0$. 对 $k=1, 2, 3, 4$ 求和得 $4P_1(1)-P_2(1)-P_3(1)-P_4(1)=0$, $-P_1(1)-P_2(1)-P_3(1)-P_4(1)=0$,两式相减得$5P_1(1)=0$, $P_1(1)=0$. 于是 $\omega^kP_2(1)+\omega^{2k}P_3(1)+\omega^{3k}P_4(1)=0$, 且 $P_2(1)+\omega^kP_3(1)+\omega^{2k}P_4(1)=0$, 又可得 $P_2(1)=0$. 进而 $P_3(1)=0$, $P_4(1)=0$.再将$x=1$代入$P_1(x^5)+xP_2(x^5)+x^2P_3(x^5)+x^3P_4(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)P_0(x)$即得 $5P_0(1)=0$,从而 $Q_0(1)=0$.

习 题 44

1. $f(x)=1+x^p+x^{2p}+\cdots+x^{(n-1)p}=\frac{x^{np}-1}{x^p-1}$, $g(x)=1+x^q+x^{2q}+\cdots+x^{(m-1)q}=\frac{x^{mq}-1}{x^q-1}$. 从$(x^{np}-1,x^{mq}-1)=x^{(np,mq)}-1$ 的根中去掉其中的 x^p-1 的根及 x^q-1 的根, 即得$(f(x), g(x))$的全部根.故$(f(x),g(x))=\frac{(x^{(np,mq)}-1)(x^{(p,q)}-1)}{x^{(p,mq)}-1(x^{(np,q)}-1)}$.

2. 注意到当 $m<n$ 时有$(2^m+1)|(2^{2m+1}-1)|(2^{2n}-1)$, 可知 $(2^{2^m}+1, 2^{2^n}+1)=(2^m+1, (2^{2^n}-1)+2)=(2^{2^m}+1,2)=1$.

3. $(21n+4, 14n+3)=(21n+4-(14n+3),14n+3)=(7n+1, 14n+3)-2(7n+1))=(7n+1,1)=1$.

4. (1) 公共根也应是两方程之差$(p_1-p_2)x+(q_1-q_2)=0$的根. 当$p_1\neq p_2$时$\left(-\frac{q_1-q_2}{p_1-p_2}\right)^2+p_1\left(-\frac{q_1-q_2}{p_1-p_2}\right)+q_1=0$, 即$(q_1-q_2)^2+(p_1-p_2)(p_1q_2-p_2q_1)=0$; 此条件当$p_1=p_2$(从而$q_1=q_2$)时也成立. 此条件也是充分的.

(2) 当两方程不重合且有公共根时$p_1\neq p_2$, $x_1=-\frac{q_1-q_2}{p_1-p_2}$是公共根, 为有理数, 由韦达定理知两方程的另一根分别为有理数$-p_1-x_1$和$-p_2-x_1$.

5. 重根α应是$f(x)=x^3-3x^2+4$与$f'(x)=3x^2-6x$的公共根. $f'(x)$的两根为0,2, 其中2是$f(x)$的根, 因而是重根. 第三根为$3-2\times2=-1$.

6. 条件应为$(x^3+px+q,\ 3x^2+p)\neq1$. 但$(x^3+px+q,\ 3x^2+p)=\left(\frac{2}{3}px+q,\ 3x^2+p\right)$. 当$p=0$时$q=0$. $p\neq0$时$3\left(-\frac{3q}{2p}\right)^2+p=0$, 即$27q^2+4p^3=0$, 此条件当$p=q=0$时也成立.

7. $(x^6+x^4+3x^2+2x+2,\ 6x^5+4x^3+6x+2)=x^2+x+1$, $x^6+x^4+3x^2+2x+2=(x^2+x+1)^2(x^2-2x+2)$, 根为$\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$(二重), $1\pm i$(一重).

8. 若$e^x=\frac{f(x)}{g(x)}$, 可设$f(x)$与$g(x)$互素, $\frac{f(2x)}{g(2x)}=e^{2x}=(e^x)^2=\frac{(f(x))^2}{(g(x))^2}$, $(f(x))^2$与$g(x))^2$仍互素, 仿例12得矛盾.

9. x^{30}除以x^2+1余$(-1)^{15}=-1$, 除以$(x+1)^2$余$30(-1)^{29}(x+1)+(-1)^{30}=-30x-29$. 由$(x+1)^2-(x^2+1)=2x$和$(x^2+1)-\frac{1}{2}x(2x)=1$得$1=(x^2+1)-\frac{1}{2}x[(x+1)^2-(x^2+1)]=\left(\frac{1}{2}x+1\right)(x^2+1)-\frac{1}{2}x(x+1)^2$, 于是$\varphi_1(x)=-\frac{1}{2}x(x+1)^2$除以$x^2+1$和$(x+1)^2$分别余1,0. 取$R(x)=-\varphi_1(x)+(-30x-29)(1-\varphi_1(x))=(30x+28)\varphi_1(x)-30x-29=-(15x+14)x(x+1)^2-30x-29$, 则$x^{30}-R(x)$被$(x+1)^2\cdot(x^2+1)$整除. $r(x)=R(x)+15(x^2+1)(x+1)^2=(-14x+15)(x+1)^2-30x-29$即是所求的余式.

10. $P(x)$除以$(x\pm1)^3$余±1. $(x+1)^3-(x-1)^3=6x^2+2$, $(x-1)^3-\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}\right)(6x^2+2)=\frac{8}{3}x$, $(6x^2+2)-\frac{9}{4}x\cdot\frac{8}{3}x=2$, 于是 $2=(6x^2+2)-\frac{9}{4}x\left[(x-1)^3-\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}\right)(6x^2+2)\right]=\left(\frac{3}{8}x^2-\frac{9}{8}x+1\right)(6x^2+2)-\frac{9}{4}x(x-1)^3=\left(\frac{3}{8}x^2-\frac{9}{8}x+1\right)[(x+1)^3-(x-1)^3]-\frac{9}{4}x(x-1)^3=\left(\frac{3}{8}x^2-\frac{9}{8}x+1\right)(x+1)^3-\left(\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{8}x+1\right)(x-1)^3$. 于是 $G(x)=-\left(\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{8}x+1\right)(x-1)^3=2-\left(\frac{3}{8}x^2-\frac{9}{8}x+1\right)(x+1)^3$除以$(x-1)^3$与$(x+1)^3$分别余0和2, $P(x)=-\left(\frac{3}{8}x^2+\frac{9}{8}x+1\right)(x-1)^3-1$ 即为所求.

习 题 45

1. $r+s=p$, $rs=q$, $r^2+s^2=p^2-2q$. $\left(r^2+\frac{1}{s^2}\right)+\left(s^2+\frac{1}{r^2}\right)=(r^2+s^2)+\frac{r^2+s^2}{(rs)^2}=(p^2-2q)\left(1+\frac{1}{q^2}\right)$, $\left(r^2+\frac{1}{s^2}\right)\left(s^2+\frac{1}{r^2}\right)=(rs)^2+2+\frac{1}{(rs)^2}=\left(q+\frac{1}{q}\right)^2$, 故所求方程为 $q^2x^2-(p^2-2q)(q^2+1)x+(q^2+1)^2=0$.

2. 设三根为 x_1, x_2, x_3, 则 $c=-x_1x_2x_3=-x_2^3\neq0$, $x_2=-\sqrt[3]{c}$, $(-\sqrt[3]{c})^3+a(-\sqrt[3]{c})^2+b(-\sqrt[3]{c})+c=0$, $a\sqrt[3]{c^2}-b\sqrt[3]{c}=0$, $a\sqrt[3]{c}=b$, $a^3c=b^3$. $x_1x_3=x_2^2=\sqrt[3]{c^2}$, $x_1+x_3=-a-x_2=-a+\sqrt[3]{c}$, x_1与x_3是方程 $x^2+(a-\sqrt[3]{c})x+\sqrt[3]{c^2}=0$的根, 此方程有相异实根的条件为$(a-\sqrt[3]{c})^2-4\sqrt[3]{c^2}>0$, $(a-\sqrt[3]{c}+2\sqrt[3]{c})(a-\sqrt[3]{c}-2\sqrt[3]{c})>0$, c在$\frac{a^3}{27}$与$-a^3$之间. 故所求条件为: $c\neq0$, $b^3=a^3c$, c介于$-a^3$与$\frac{a^3}{27}$之间.

3. 令 $u=\sqrt[3]{8-x}$, $v=\sqrt[3]{27+x}$, 则 $u^2+v^2=uv+7$, $u^3+v^3=35$, $u+v=\frac{u^3+v^3}{u^2+v^2-uv}=\frac{35}{7}=5$, $uv=\frac{1}{3}[(u+v)^2-(u^2+v^2-uv)]=6$.

可解出 u，v 为 2，3，$x=0$ 或 -19.

4．两边乘以 $2\times3\times4$ 得 $(12x-1)(12x-2)(12x-3)(12x-4)=2\times3\times4\times5$．令 $y=12x$，得 $(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)=2\times3\times4\times5$．易见 $y=6$ 和 $y=-1$ 是解．设 y 的另外两解为 y_1，y_2，则 $y_1+y_2=(1+2+3+4)-6-(-1)=5$，$y_1y_2=\dfrac{2\times3\times4-2\times3\times4\times5}{(-1)\times6}=16$，可解出 y_1，y_2.

5．令 $x=y+2$，则 $(y+2)^4+(y-2)^4=626$，展开后得到双二次方程 $y^4+24y^2-297=0$，$y^2=9$ 或 -33，$x=5$，-1，$2\pm\sqrt{33}i$.

6．$0=(x+y)^2-(x^2+y^2)-2xy=(a-z)^2-(b^2-z^2)-2z^2=-2az+(a^2-b^2)$．当 $a=0$ 时 b 应为 0，z 为任意值，由 $x+y=-z$ 与 $xy=z^2$ 得 x,y 为 $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}z$．当 $a\neq0$ 时 $z=\dfrac{a^2-b^2}{2a}$，由 $x+y=a-z=\dfrac{a^2+b^2}{2a}$ 与 $xy=z^2=\left(\dfrac{a^2-b^2}{2a}\right)^2$ 可解出 x,y 为 $\dfrac{a^2+b^2\pm\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}}{4a}$.
要使 x，y，z 为不同的正数，首先应 $a>0$，$b\neq0$，$a^2>b^2$，$(3a^2-b^2)\cdot(3b^2-a^2)>0$，于是 $|b|<a<\sqrt{3}|b|$．此时并可知 z 不满足 x，y 所满足的方程 $t^2-(a-z)t+z^2=0$，（即 $z^2-(a-z)z+z^2\neq0$），因而 x,y,z 的确互不相同.

7．仿照例 7.

8．设所有的根为 x_1，x_2，…，则 $\dfrac{1}{x_1}$，$\dfrac{1}{x_2}$，…满足的方程为 $x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0=0$（不妨假定 $a_0\neq0$），$\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n^2}=1-2=-1<0$，$x_1$，…，$x_n$ 不能全为实数.

9．方程即 $nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+3x^2+2x-(n+1)(n-1)=0$，由有理根定理可考虑 $\dfrac{n+1}{n}$．经验证 $\dfrac{n+1}{n}$ 是根.

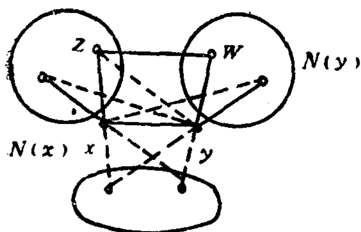
10．记 σ_k 是 x，y，z，w 中每次取 k 个的乘积之和，$1\leqslant k\leqslant4$．则 $\sigma_1=10$，$\sigma_4=24$，$\sigma_2=\dfrac{1}{2}[\sigma_1^2-(x^2+y^2+z^2+w^2)]=35$，由 $x^3+y^3+z^3+w^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$ 得 $\sigma_3=50$．于是 x，y，z，w 是方程 $t^4-10t^3+35t^2-50t+24=0$ 的四个根．由有理根定理及用综合除法试验可求出四个根为 1，2，3，4.

11. $xy-x-y+1=1$, $(x-1)(y-1)=1$, $x-1=y-1=\pm1$, $x=y=0$ 或 2.

12. $z=-(x+y)$, $x^3+y^3-(x+y)^3=-18$, $3xy(x+y)=18$, $xyz=-6$. 由 $x+y+z=0$ 知 x, y, z 这三个数中有两个正、一个负，且负数的绝对值最大. 应为-3，其余两数为 1 和 2.

又解 x, y, z 是方程 $t^3+pt-q=0$ 的三个根. 其中系数 p, q待定. 将 x, y, z 分别代入方程两边，再将所得的三个等式相加可得$-18-3q=0$, $q=-6$, 即 $xyz=-6$, 与前一种解法同样可得 x, y, z.

习 题 46



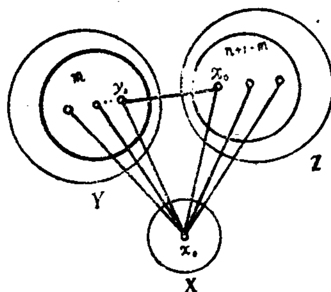
(第 1 题)

1. 所要证明的命题的图论形式是：如果简单图G中(1)任意两个相邻的顶点都没有公共邻点，而且(2)任意两个不相邻的顶点都恰有两个公共邻点，则图 G 是正则的. 证明如下：设 G 中顶点 x 与y 相邻，且 $N(x)$ 与 $N(y)$ 分别表示 G 中所有和 x 与 y相邻的邻点集合(如图,其中不相邻的顶点之间连虚线). 设 $z\in N(x)$. 由(1)，y 和 z 不相邻. 由(2)，y 和 z 有两个公共邻点，一个是 x，另一个是 w，并且 $w\in N(y)$，于是令 $N(x)$中的 z 与 $N(y)$中的 w 相对应. 这一映射是 $N(x)$到 $N(y)$ 上的双射. 因此 $d(x)=|N(x)|=|N(y)|=d(y)$. 如果 G 中顶点 x 和 y 不相邻，则由(2)，G 中有顶点 z 和 x 与 y 都相邻. 于是 $d(x)=d(z)=d(y)$.

2 将 n 个点看成图 G 的 n 个顶点. 若两点的距离为 1，则相邻两个顶点相邻. 图 G 和 x 相邻的顶点一定落在以 x 为圆心，以 1 为半径的圆周 C 上. 由于这 n 个点中任意两点距离至少是 1，所以 C 上至多含有图 G 的 6 个顶点，即 x 的度 $d(x)\leqslant6$. 由定理 1，$2q(G)\leqslant6n$，因此 $q(G)\leqslant3n$. 这说明，图 G 至多有 $3n$ 条边，也就是说，这 n 个

点中至多有 $3n$ 对点，每对点的距离恰好是 1.

3. 将学生看成顶点，相应于三所中学 A，B 和 C 学生的顶点所组成的集合依次记作 X，Y 和 Z. 设 u 和 v 是代表不同学校的两名学生的顶点. 如果这两名学生相互认识，则 u 和 v 相邻，否则 u 和 v 不相邻，得到的图记作 G. 注意在 G 中属于同一个顶点集合的两个顶点 x 和 y 总认为是不相邻的，不管 x 和 y 所代表的学生相邻与否. 设 $x\in X$，Y 与 Z 中和 x 相邻的顶点数分别记作 k 与 l. 由已知条件，$k+l=n+1$. k 与 l 中大的记作 $m(x)$. 让 x 跑遍 X，$m(x)$ 的最大者记作 m_X. 同样 m_Y 与 m_Z 作类似理解. 数 m_X，m_Y 和 m_Z 中最大的记作 m. 不妨设 $m=m_X$，并且 $x_0\in X$，使得 Y 中和 x_0 相邻的顶点集合 Y_1 的基数 $|Y_1|=m$（如图）. 于是 Z 中与 x_0 相邻的顶点数为 $n+1-m\geqslant 1$（$\because m\leqslant n$）. 设 Z 中 z_0 与 x_0 相邻. 如果有 $y_0\in Y_1$，使 z_0 与 y_0 相邻，则 $\triangle x_0y_0z_0$ 是 G 中一个三角形. 若 Y_1 中每个 y_0 与 z_0 都不相邻，则 Y 中与 z_0 相邻的顶点数 $\leqslant n-m$. 因此 z_0 与 X 中相邻的顶点数 $\geqslant n+1-(n-m)=m+1$，与 m 的最大性相矛盾. 于是证明 G 中必有 $x_0y_0z_0$.



（第 3 题）

习 题 47

1. 要证的是，$r(4,4)\leqslant 18$. 证明如下：由定理 3，$r(4,4)\leqslant r(3,4)+r(4,3)=2r(3,4)$. 由例 4，$r(3,4)\leqslant 9$，即得所证. 如果不用定理 3 和 $r(3,4)\leqslant 9$，则可直接证如下：任取 2 色 K_{18} 的顶点 x，它连 17 条边，两种颜色，故有 9 边同色. 设 $xy_1,xy_2,\cdots,xy_9$ 为红边，则以 $y_1,y_2,\cdots,y_9$ 为顶点的完全子图 K_9 仍是 2 色的，它含有红三角形 $\triangle y_iy_jy_k$ 或蓝完全子图 K_4. 于是 K_{18} 含单色三角形. 若有 $xz_1,xz_2,\cdots,xz_9$ 为蓝色，证明相仿.

2. 首先证明，在不含红三角形和蓝 K_4 的 2 色 K_8 中，每个顶点至多连

有 3 条红边．据此即可画出所需之 K_8．图略．

3．等价的图论命题是，用颜色 c_0，c_1，c_2，…去染 9 阶图 G 的边，使得 (1) G 不含 c_0 色三角形；(2) 每个顶点至多连有三种非 c_0 色的有色边；(3) 如果某三角形两边同色，则该三角形是单色的．欲证 G 含非 c_0 色的单色三角形．可设 G 即是 K_9．由(3)，可设 K_9 中顶点 v 至少连有 5 条 c_0 色边 $vu_1,vu_2,\cdots,vu_5$．由(1)，K_9 中以 $u_1,u_2,\cdots,u_5$ 为顶点的完全图 K_5 不含 c_0 色边．由(2)，u_i 至少连有两条 c_i 色边，$i\geqslant 1$．由(3)K_9 含非 c_0 色的单色三角形．

4．首先用反证法证明，上底与边同色．设若不然，有 2 边不同色．可设 A_1A_2 与 A_1A_5 分别是红边与绿边．由 A_1 到 B_1，…，B_5 的 5 边中必有 3 边同色．不妨设 A_1B_1，A_1B_2，A_1B_3 为红色．由假设，B_1B_2 为绿色，A_2B_1 为绿色，从而 A_2B_2 为红色，即 $\triangle A_1A_2B_2$ 为单色三角形，矛盾．同理下底 5 边同色．最后再用反证法证明，上下底的边同色．